Lucrarea de laborator 8
Rezolvarea ecuațiilor diferențiale şi a sistemelor de ecuații diferențiale

Obiectivele lucrării

- fixarea cunoştințelor privitoare la rezolvarea ecuațiilor diferențiale şi a sistemelor de ecuații diferențiale folosind mediul de programare Matlab,
- însuşirea modului de a aduce ecuațiile diferențiale, respectiv sistemele de ecuații diferențiale de ordin superior, la o formă echivalentă cu cea a sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul I,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

1. Exemple de studiat

Recomandăm parcurgerea anexelor A8 şi B8 înaintea studierii exemplelor rezolvate.

Exemplul 8.1: Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 2-3 ecuația diferențială de ordinul I:

$$y' = x^2 \cdot (y+1)$$

cu condiția inițială *y*(1)=1, pe intervalul [1,2].

<u>*Soluție*</u>: Se parcurg următoarele două etape:

- se defineşte expresia derivatei funcției necunoscute *y* într-un fişier-funcție, de exemplu `ecdif1.m`:

```
function dy=ecdif1(x,y)
dy=x.^2.*(y+1);
```

- se rezolvă ecuația diferențială (de exemplu folosind funcția Matlab *ode23*), executând următoarea secvență Matlab (de exemplu, fişier script):

```
% conditia initiala
y0=1;
% domeniul (intervalul)
dom=[1,2];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode23('ecdif1',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval)
```

Se obține soluția sub formă de seturi de valori:

```
xval =
    1.0000    1.0400    1.1400    1.2400    1.3400    1.4368
    1.5280    1.6140    1.6950    1.7717    1.8443    1.9133
    1.9789    2.0000
yval =
    1.0000    1.0850    1.3482    1.7055    2.1955    2.8512
    3.7058    4.8171    6.2622    8.1423   10.5908   13.7830
   17.9494   19.6011
```

Soluția este reprezentată grafic în figura 8.1.

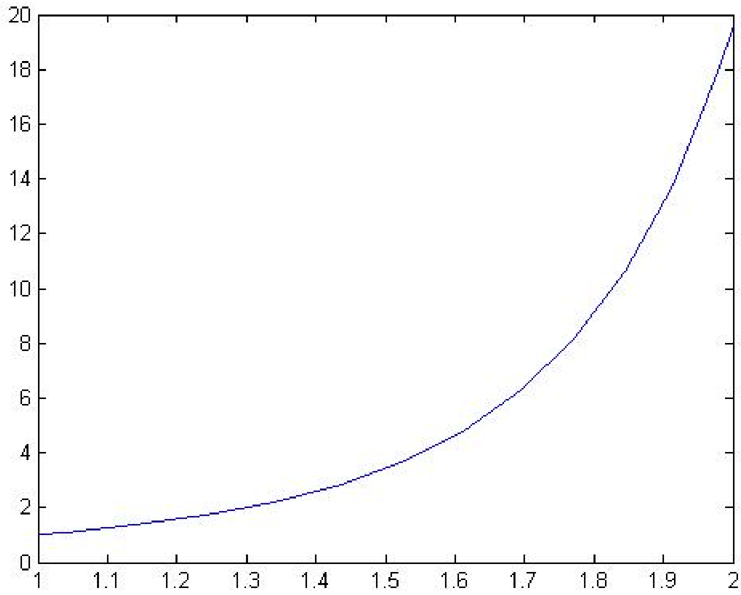

Fig.8.1. *Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 8.1.*

Exemplul 8.2: Să se rezolve prin metoda Adams-Bashforth-Moulton următoarea ecuație diferențială de ordinul II:

$$y'' = -1.2 \cdot y' - y + 10$$

cu condițiile inițiale $y(0)=2$, $y'(0)=0$, pe intervalul [0,10].

<u>*Soluție*</u>: Se rescrie ecuația sub forma unui sistem de 2 ecuații diferențiale de ordinul I, prin introducerea notațiilor $y_1=y$, $y_2=y'$. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -1.2 \cdot y_2 - y_1 + 10 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $y_1(0)=2$, $y_2(0)=0$.

Rezolvarea sistemului de mai sus presupune parcurgerea celor două etape descrise la exemplul 8.1.:

- se defineşte vectorul expresiilor derivatelor funcţiilor y_1 şi y_2 într-un fişier-funcţie (de exemplu `ecdif2.m`):

```
function dy=ecdif2(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy(1)=y(2);
dy(2)=-1.2*y(2)-y(1)+10;
```

- se rezolvă ecuaţia diferenţială executând următoarea secvenţă Matlab (de exemplu, fişier script):

```
% conditiile initiale
y0=[2; 0];
% domeniul (intervalul)
dom=[0,10];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode113('ecdif2',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1))
```

Se obţine soluţia (prima coloană a matricei `yval`) şi derivata sa (a doua coloană a matricei `yval`) sub formă de seturi de valori:

```
xval =    0         yval =    2.0000         0
    0.0000                    2.0000    0.0000
    0.0000                    2.0000    0.0000
    0.0000                    2.0000    0.0001
    0.0000                    2.0000    0.0001
    0.0000                    2.0000    0.0002
    0.0001                    2.0000    0.0005
    0.0001                    2.0000    0.0010
    0.0003                    2.0000    0.0020
    0.0005                    2.0000    0.0040
    0.0010                    2.0000    0.0081
    0.0020                    2.0000    0.0162
    0.0040                    2.0001    0.0323
    0.0081                    2.0003    0.0644
    0.0162                    2.0010    0.1283
    0.0324                    2.0041    0.2540
    0.0648                    2.0163    0.4981
    0.1295                    2.0637    0.9570
    0.2591                    2.2413    1.7614
    0.5181                    2.8632    2.9511
    0.7772                    3.7284    3.6536
    1.0362                    4.7222    3.9588
    1.2953                    5.7532    3.9553
    1.5543                    6.7523    3.7258
    1.8134                    7.6706    3.3441
    2.0724                    8.4771    2.8726
    2.5905                    9.7012    1.8529
    3.1086                   10.4173    0.9427
    3.6268                   10.7205    0.2695
```

```
    4.1449                10.7428   -0.1453
    4.3780                10.6952   -0.2563
    4.6112                10.6264   -0.3281
    5.0775                10.4573   -0.3789
    5.5438                10.2860   -0.3460
    6.0100                10.1412   -0.2706
    6.4763                10.0354   -0.1832
    6.9426                 9.9691   -0.1033
    7.4089                 9.9362   -0.0407
    7.8752                 9.9279    0.0018
    8.1084                 9.9300    0.0158
    8.3415                 9.9349    0.0257
    8.8078                 9.9496    0.0352
    9.2275                 9.9646    0.0352
    9.6472                 9.9785    0.0304
   10.0000                 9.9882    0.0246
```

Soluția este reprezentată grafic în figura 8.2.

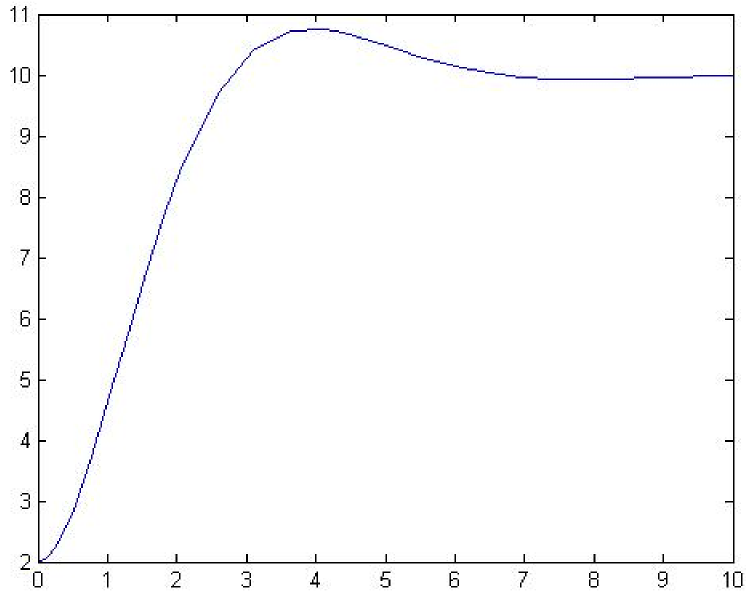

Fig.8.2. *Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 8.2.*

Exemplul 8.3: Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4-5 sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = x - y_1 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $y_1(0)$=0.1, $y_2(0)$=0, pe intervalul [0,10].

<u>*Soluție*</u>: Se parcurg etapele:

- se defineşte vectorul expresiilor derivatelor într-un fişier-funcție (de exemplu `sistdif.m`):

```
function dy=sistdif(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy=[y(1)+y(2); x-y(1)];
```

- se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale prin execuția următorului set de instrucțiuni Matlab (fişier script):

```
% conditiile initiale
y0=[0.1; 0.2];
% domeniul (intervalul)
dom=[0,10];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode45('sistdif',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1),'b',xval,yval(:,2),'r--')
legend('y1','y2')
```

obținând soluțiile sub formă de puncte (prima coloană a matricei `yval` reprezintă funcția soluție y_1, a doua coloană reprezintă funcția soluție y_2):

```
xval =    0          yval =    0.1000    0.2000
    0.0167                     0.1051    0.1984
    0.0335                     0.1102    0.1970
    0.0502                     0.1153    0.1959
    0.0670                     0.1206    0.1949
    0.1507                     0.1480    0.1927
    0.2344                     0.1778    0.1952
    0.3182                     0.2107    0.2021
    0.4019                     0.2472    0.2131
    0.5658                     0.3317    0.2452
    0.7296                     0.4381    0.2886
    0.8935                     0.5718    0.3393
    1.0573                     0.7386    0.3922
    1.2445                     0.9770    0.4479
    1.4317                     1.2747    0.4886
    1.6188                     1.6396    0.5024
    1.8060                     2.0787    0.4763
    2.0402                     2.7407    0.3648
    2.2744                     3.5344    0.1375
    2.5087                     4.4600   -0.2361
    2.7429                     5.5095   -0.7860
    2.9548                     6.5508   -1.4585
    3.1667                     7.6588   -2.3146
    3.3787                     8.8049   -3.3654
    3.5906                     9.9509   -4.6147
    3.8182                    11.1274   -6.1710
    4.0458                    12.1810   -7.9312
    4.2734                    13.0335   -9.8593
```

```
    4.5010                   13.5968  -11.8983
    4.7510                   13.7696  -14.1717
    5.0010                   13.3529  -16.3547
    5.2510                   12.2286  -18.2881
    5.5010                   10.2933  -19.7796
    5.7510                    7.4709  -20.6124
    6.0010                    3.7225  -20.5593
    6.2510                   -0.9331  -19.3946
    6.5010                   -6.4021  -16.9022
    6.7027                  -11.2909  -13.7945
    6.9043                  -16.4650   -9.6271
    7.1060                  -21.7488   -4.3594
    7.3077                  -26.9177    2.0060
    7.5085                  -31.6833    9.3849
    7.7094                  -35.7634   17.6997
    7.9103                  -38.8186   26.7816
    8.1111                  -40.4739   36.3831
    8.3315                  -40.2090   47.1212
    8.5518                  -37.2497   57.5623
    8.7721                  -31.0862   67.0658
    8.9924                  -21.2531   74.8667
    9.2185                   -6.9471   80.1954
    9.4446                   11.9206   81.8218
    9.6706                   35.4431   78.7156
    9.8967                   63.4540   69.8396
    9.9225                   66.9222   68.4123
    9.9484                   70.4427   66.8955
    9.9742                   74.0143   65.2878
   10.0000                   77.6362   63.5879
```

Graficul soluțiilor este redat în figura 8.3.:

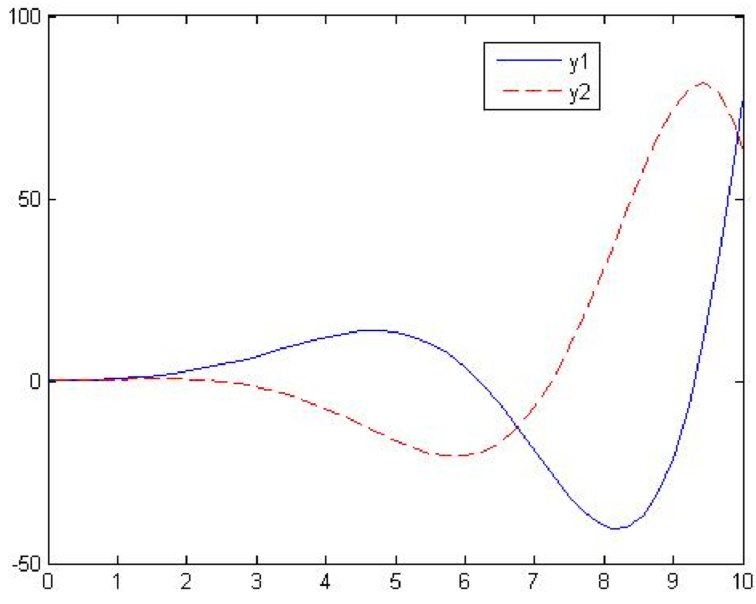

Fig.8.3. *Graficul soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale din exemplul 8.3.*

2. Probleme de rezolvat

P8.1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy pe intervalele menționate. Soluția / soluțiile se va / vor reprezenta grafic (în cazul sistemelor, reprezentarea soluțiilor se va face în aceeaşi fereastră grafică):

a) $y' + y^2 = 3 \cdot x$, $y(-1)=2$, pe [-1,5];

b) $y'' - y' = 2 \cdot y \cdot \sin(t)$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, pe [0,6];

c) $-y''' + y'' - x \cdot y' + 2 \cdot y \cdot \sin(x) - x^3 = 0$, $y(1)=0.5$, $y'(1)=-0.5$, $y''(1)=0.3$, pe [1,4];

d) $\begin{cases} x'+2x = y-2z+sin(t), & x(0)=0 \\ y'+2y = x+2z-cos(t), & y(0)=0.2 \\ z'-5z = 3x-3y, & z(0)=-0.1 \end{cases}$, pe [0,3].

P8.2. Să se aproximeze valorile funcțiilor-soluție obținute la problema 8.1. în punctele menționate mai jos:

a) -1, -0.5, 0, 1, 2.3, 5 pentru soluția de la P8.1.a);

b) 0, 1.5, 2.3, 3.7, 4, 5.45, 6 pentru soluția de la P8.1.b);

c) 1, 2.2, 3.5, 4 pentru soluția de la P8.1.c);

d) 0, 0.75, 1.1, 1.16, 2, 3 pentru soluțiile de la P8.1.d).

P8.3. Se consideră un robot cu trei grade de libertate de tip translație-translație-rotație, ale cărui ecuații dinamice ale mişcării sunt:

$$\begin{cases} (m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1 = F_1 \\ (m_2+m_3)\ddot{q}_2 = F_2 - m_2 g - m_3 g \\ J_3 \ddot{q}_3 = M_3 \end{cases},$$

în care au fost utilizate următoarele notații:

- q_1, q_2, q_3 - coordonatele generalizate (funcții de timp, t);
- m_1, m_2, m_3 - masele ansamblelor element-cuplă ale robotului;
- F_1, F_2 - forțele care produc mişcările cuplelor de translație;
- M_3 - momentul care produce mişcarea cuplei de rotație;
- J_3 - momentul de inerție axial al ansamblului cuplă 3 - element 3.

Cunoscând masele (m_1=10 kg, m_2=4.15 kg, m_3=0.5 kg), momentul de inerție axial (J_3=0.015 kgm^2), expresiile analitice ale forțelor şi momentului:

$F_1(t)$=-58.6·sin(2·t) $F_2(t)$=23.25·e^{-t}·(sin(4·t)-3cos(4·t))+45.601 $M_3(t)$=0.004·t^2
şi condițiile inițiale $q_1(0)$=0, $q'_1(0)$=2, $q_2(0)$=1, $q'_2(0)$=-1, $q_3(0)$=-0.5, $q'_3(0)$=0, să se determine variația coordonatelor cuplelor cinematice în intervalul de timp [0,3] (secunde).

3. Întrebări recapitulative

Î8.1. Definiți *problema de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale*.

Î8.2. Precizați care sunt etapele de rezolvare în Matlab a ecuațiilor diferențiale / sistemelor de ecuații diferențiale.

Î8.3. Precizați ce funcții Matlab destinate rezolvării ecuațiilor diferențiale cunoaşteți (denumire, metoda numerică care stă la baza funcției, cea mai simplă sintaxă – fără semnificația parametrilor).

Î8.4. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a ecuației diferențiale de ordinul III: $x'''+2\cdot x''+x'-x+2\cdot t^2=1$.

Î8.5. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul II: $\begin{cases} x'' + y = sin(u) \\ x' - y' + u = 0 \end{cases}$.