Anexa B1
Elemente de algebră matriceală şi vectorială.

1. Elemente de algebră matriceală

a. Diferite tipuri de matrice

Fie A o matrice cu m linii şi n coloane:

$$A=\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Dacă m=n, atunci matricea A este ***o matrice pătratică de ordinul n***.

Transpusa matricei A este matricea notată A^T, cu n linii şi m coloane, obţinută din matricea A prin schimbarea liniilor cu coloanele:

$$A=\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{m,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Proprietăţi: Dacă B este o matrice de aceleaşi dimensiuni cu A, iar α un scalar, atunci, operaţia de transpunere are următoarele proprietăţi:

$(A+B)^T=A^T+B^T$ $\quad$ $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

$(A^T)^T=A$ $\quad$ $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$

Dacă A este pătratică şi $A=A^T$, atunci A este ***o matrice simetrică***.

Exemplu: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Dacă A este pătratică şi $A=-A^T$, atunci A este ***o matrice antisimetrică***.

Exemplu: $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Conjugata unei matrice A de numere complexe este matricea notată $\overline{A}$ care conţine conjugatele elementelor matricei A.

Dacă A este pătratică şi $A_{i,j}=0,\ \forall\ i>j$, atunci A este ***superior triunghiulară***.

Exemplu: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Dacă A este pătratică şi $A_{i,j}=0,\ \forall\ i<j$, atunci A este ***inferior triunghiulară***.

Exemplu: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Dacă A este pătratică şi $A_{i,j} = 0$, $\forall\ i \neq j$, atunci A este ***o matrice diagonală.***

O matrice diagonală de ordinul n cu toate elementele de pe diagonală de valoare unitară, se numeşte ***matrice unitate de ordinul n***:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

O matrice pătratică A este ***ortogonală*** dacă $A^{-1}=A^T$, adică dacă $A \cdot A^T = I_n$.

b. Determinant. Inversa unei matrice

Se consideră o matrice pătratică reală A de ordinul n.

Numărul:

$$\det A = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^{I(k_1,k_2,\ldots,k_n)} A_{1,k_1} A_{2,k_2} \ldots A_{n,k_n}$$

în care $I(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ este numărul tuturor inversiunilor permutării $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, se numeşte ***determinantul matricei A*** sau ***determinant de ordinul n***.

O matrice reală pătratică A se numeşte ***singulară*** dacă det A = 0; în cazul det A ≠ 0, se spune că matricea A este ***nesingulară***.

Matricea pătratică A de ordinul n este ***inversabilă*** dacă există o matrice pătratică B de ordinul n astfel încât:

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Matricea B din relația de mai sus se numeşte ***matricea inversă*** a matricei A şi se notează cu A^{-1}.

Se observă că determinantul unei matrice inversabile este nenul.

Principalele proprietăți ale operației de inversare sunt:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det\ A}\ , \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}\ , \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Se numeşte ***minor al elementului $A_{i,j}$*** din det A, determinantul de ordinul n-1 care se obține din det A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j. Minorul elementului $A_{i,j}$ se notează cu $M_{i,j}$.

Se numeşte ***complement algebric*** sau ***cofactor al elementului $A_{i,j}$*** din det A numărul:

$\underline{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

Se numeşte ***adjuncta matricei* A** , şi se notează cu A^*, matricea:

$$A^* = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{21} & \cdots & \underline{A}_{n1} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{22} & \cdots & \underline{A}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{A}_{1n} & \underline{A}_{2n} & \cdots & \underline{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

Utilizând noțiunile de mai sus, inversa matricei A se poate exprima sub forma următoare:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*$$

c. Rangul unei matrice

Fie *A* o matrice de dimensiune m×n.

Se numeşte ***minor de ordin k al matricei A*** orice determinant de ordin k format din k^2 elemente ale lui A (k linii şi k coloane, păstrând ordinea elementelor).

Se spune că matricea A are ***rangul r***, dacă A are un minor de ordinul r nenul, iar toți minorii lui A de ordin mai mare decât r, dacă există astfel de minori, sunt nuli. Faptul că matricea A are rangul r se scrie sub forma:

rang A=r

d. Factorizarea matricelor

Prin ***factorizarea unei matrice pătratice A de ordinul n*** se înțelege exprimarea matricei A sub forma unui produs de două matrice de acelaşi ordin cu A. De obicei, cele două matrice sunt matrice de anumite tipuri (triunghiulare, ortogonale etc.). Astfel se disting mai multe metode de factorizare, dintre care menționăm următoarele:

- ***Factorizarea LR*** (cunoscută şi sub denumirea de *factorizare LU*)

Matricea A se srie sub forma:

A=L·R

unde L este o matrice inferior triunghiulară, iar R o matrice superior triunghiulară.

Un caz particular îl constituie factorizarea LR a matricelor simetrice şi pozitiv definite, numită ***factorizare Cholesky***. În acest caz, $L=R^T$.

Observație. Fie A_K submatricea determinată de primele k linii şi primele k coloane ale matricei pătratice A de ordinul n. Matricea A este ***pozitiv definită***, dacă şi numai dacă determinanții tuturor submatricelor A_K, k=1,2,...,n sunt strict pozitivi.

- ***Factorizarea QR***

Exprimarea matricei A se face sub forma:

A=Q·R

unde Q este o matrice ortogonală, iar R o matrice superior triunghiulară.

2. Elemente de algebră vectorială

Se consideră spațiul real 3-dimensional, raportat la un sistem ortogonal de coordonate xOyz.

Fie $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ doi vectori cunoscuți prin proiecțiile lor pe axele sistemului de coordonate:

$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{w} = w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}$

unde $\vec{i}, \vec{j}.\vec{k}$ sunt versorii axelor Ox, Oy, respectiv Oz.

Norma euclidiană a (***modulul, mărimea***) ***vectorului*** $\vec{v}$ este numărul real pozitiv determinat prin relația:

$$v=\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Un vector al cărui modul este egal cu 1 se numeşte ***vector unitar*** sau ***versor***.

Norma p a vectorului $\vec{v}$ este numărul real pozitiv determinat prin relația:

$$v_p=\sqrt[p]{v_x^p + v_y^p + v_z^P}$$

Produsul scalar al vectorilor $\vec{v}$ ***şi*** $\vec{w}$ este un număr (scalar) real determinat prin relația:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z$$

Vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt ***ortogonali*** dacă şi numai dacă $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Prin ***unghiul dintre vectorii*** $\vec{v}$ ***şi*** $\vec{w}$ se înțelege unghiul mic determinat de sensurile pozitive ale celor doi vectori. Unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ se notează cu $\angle(\vec{v}, \vec{w})$. Cosinusul acestui unghi se calculează cu formula:

$$cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}$$

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{v}$ ***şi*** $\vec{w}$ este un vector notat $\vec{v} \times \vec{w}$ care are direcția perpendiculară pe direcțiile celor doi vectori, sensul dat de aplicarea regulii burghiului drept când se roteşte primul vetor ($\vec{v}$) peste cel de-al doilea vector ($\vec{w}$), şi modulul egal cu produsul $v \cdot w \cdot \sin(\vec{v}, \vec{w})$. Produsul vectorial al vectorilor $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ se poate calcula cu formula:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

Vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt ***paraleli*** dacă şi numai dacă $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.