

## SETUL 1

1) Să se exprime câte un majorant al erorii absolute în funcție de erorile absolute ale termenilor pentru calculul expresiilor:

a)  $u = (x + y) + z,$

b)  $u = (x + y) - z,$

c)  $u = x(y \cdot z),$

d)  $u = \left(\frac{x}{z}\right)y,$

e)  $u = x(y + z),$

f)  $u = \frac{x - y}{z}.$

2. Pentru expresiile de la problema 1) să se exprime câte un majorant al erorii relative în funcție de erorile relative ale termenilor.

3. Presupunând că se lucrează cu două zecimale exacte și aproximare prin lipsă, să se calculeze  $I_4$  în

cazul integralei  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx > 0, n \in \mathbb{N}$ , utilizând formula de recurență:

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } I_0 = 0.18. \text{ Cum poate fi interpretat rezultatul?}$$

## SETUL 2

1) Să se calculeze inversele și determinanții următoarelor matrice prin două metode, apoi să se compare și comenteze rezultatele obținute:

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Să se rezolve următoarele ecuații matriceale:

$$\text{a) } \underline{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### SETUL 3

Să se rezolve prin două metode următoarele sisteme, apoi să se compare și discute rezultatele obținute:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 12x_2 + x_3 = -25, \\ 11x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 10, \\ 13x_1 - 3x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 14, \\ 11x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 31, \\ 4x_1 + 5x_2 + 14x_3 = -1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = -7; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8, \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$$

### SETUL 4

1. Să se calculeze valorile proprii, vectorii proprii și raza spectrală pentru următoarele matrice:

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ -6 & -22 & -6 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 15 & 10 \\ -4 & -29 & -19 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } \underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 5 & 0.5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Să se determine domeniile ale planului complex (inclusiv reprezentări grafice aferente) în care se află spectrele următoarelor matrice:

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \underline{C} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \underline{D} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

### SETUL 5

Să se determine condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametrul real  $k$  pentru ca următoarele matrice să aibă toate valorile proprii cu părți reale strict negative:

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & k+2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5k & -k & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$d) \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

### SETUL 6

Pentru următoarele ecuații să se efectueze câte trei iterații în cazul a două metode de rezolvare numerică. Erorile admise sunt  $\varepsilon_x = 10^{-3}$  și  $\varepsilon_f = 10^{-2}$ . Să se compare și discute rezultatele obținute:

- a)  $x = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ ,  $x \in [4, 5]$ ;  
 b)  $\frac{x}{2 + \sqrt[4]{x}} = 1$ ,  $x \in [3, 4]$ ;  
 c)  $x^3 - x - 2 = 0$ ,  $x \in [1, 2]$ ;  
 d)  $x^2 = \sin x$ ,  $x \in [0.7, 1]$ ;  
 e)  $\arcsin \frac{x+1}{4} = x$ ,  $x \in [0, 1.5]$ ;  
 f)  $x^5 + 5x + 1 = 0$ ,  $x \in [-1, 0]$ ;  
 g)  $x^3 + x = 1000$ ,  $x \in [9, 10]$ ;  
 h)  $\arctg x + \arctg 10x = 0.75$ ,  $x \in [0, 1]$ .

### SETUL 7

Să se efectueze câte trei iterații ale metodei Newton în cazul rezolvării următoarelor sisteme. Erorile admise sunt  $\varepsilon_x = 0.01$ ,  $\varepsilon_f = 0.1$ .

- a) 
$$\begin{cases} x_1^7 - 5x_1^2 x_2^4 + 1510 = 0, \\ x_2^5 - 3x_1^4 = 105, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in [1.5 \ 2.5] \times [2.5 \ 3.5];$$
- b) 
$$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2 x_3 = 0.1, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1 x_3 = -0.2, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1 x_2 = 0.3, \end{cases} \quad \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Să se aplice apoi altă metodă de rezolvare, să se compare și comenteze rezultatele obținute.

### SETUL 8

Să se rezolve, aplicând două metode de soluționare numerică, următoarele ecuații diferențiale ordinare, apoi să se compare și să se discute rezultatele obținute:

- a)  $xy' - y + x = 0$ ,  $x \in [1; 2]$ ,  $y(1) = 1$ ;  
 b)  $y' + 2xy = x^3$ ,  $x \in [0; 1]$ ,  $y(0) = \frac{e-1}{2}$ ;  
 c)  $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ ,  $x \in [1; 2]$ ,  $y(1) = 2$ ;  
 d)  $y' + y^3 = x^2 + 1$ ,  $x \in [0; 1]$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 e)  $y' - \frac{y}{x} = x$ ,  $x \in [1; 2]$ ,  $y(1) = 2$ ;

$$f) \quad y' = y^2 + x^2 + 1, \quad x \in [0; 1], \quad y(0) = 0.$$

Să se rezolve ecuațiile a) ... f) în situația în care  $y'$  este înlocuit cu  $y''$ .

### SETUL 9

1) Să se determine polinomul de interpolare Newton de speța 1 care aproximează funcția  $f$ , cu valorile din tabelul alăturat:

a)

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	0	1	2	3	4
$y_i = f(x_i)$	0	1	8	27	64

b)

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	-1	1	3	5	7
$y_i = f(x_i)$	0	1	4	9	16

c)

$i$	0	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1	2	3	4	5
$y_i = f(x_i)$	5.2	8	10.4	12.4	14	15.2

d)

$i$	0	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1.2	2.4	3.6	4.8	6
$y_i = f(x_i)$	3	6.84	14.25	27	39.21	51

Să se aproximeze:

a)  $f(0.1)$  și  $f(2.8)$ ; b)  $f(1.5)$  și  $f(2.9)$ ; c)  $f(2.5)$  și  $f(4.8)$ ; d)  $f(0.6)$  și  $f(0.9)$ .

2) Să se exprime aproximarea numerică parabolică prin metoda celor mai mici pătrate și funcțiile spline de interpolare parabolică în cazul aproximării funcției  $f$  cu valorile din tabelul alăturat (tabelele a) ... d) de la problema anterioară). Să se aproximeze:

a)  $f(0.1)$  și  $f(2.8)$ ; b)  $f(1.5)$  și  $f(2.9)$ ; c)  $f(2.5)$  și  $f(4.8)$ ; d)  $f(0.6)$  și  $f(0.9)$ .

Să se compare și comenteze rezultatele obținute.

### SETUL 10

1) Să se rezolve următoarele probleme de optimizare fără restricții:

$$a) \text{ PFR : } \hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(v_1 - 1)^2 + (v_2 - 1)^2 + (v_3 - 1)^2 + a^2},$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \in R^3, \quad a \in R \setminus \{0\};$$

$$b) \text{ PFR : } \hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 100(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - 1)^2, \quad \mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2;$$

c) PFR:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{v_1^4 - 16v_1^2 + 5v_1}{2} + \frac{v_2^4 - 16v_2^2 + 5v_2}{2} + (v_3 - 1)^2 + (v_4 - 1)^2 + (v_5 - 1)^2$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T \in R^5$ .

2) Să se rezolve următoarele probleme de programare liniară:

a) PREI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 5v_1 + 7v_2 + 10v_3$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \in R^3$ ,

supusă la:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &\leq 4, \\ v_1 + 2v_2 + 4v_3 &\geq 5, \\ v_1, v_2, v_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

b) PREI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 4v_1 + 5v_2$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$ ,

supusă la:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &\leq 5, \\ v_1 + 2v_2 &\leq 7, \\ v_1 + 4v_2 &\leq 10, \\ v_1, v_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

c) PREI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 2v_1 - 4v_2 + 4v_3$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \in R^3$ ,

supusă la:

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 + v_3 &\leq 30, \\ v_1 + v_2 &= 10, \\ v_1 + 2v_2 + v_3 &\geq 8, \\ v_1, v_2, v_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

3) Să se rezolve următoarele probleme de optimizare cu restricții de tip inegalitate (PRI):

a) PRI:  $\hat{v} = \arg \max_v J = f(v) = e^v + \sin(6v)$ ,  $v \in R$ ,

supusă la:  $0 \leq v \leq 1$ ;

b) PRI:  $\hat{v} = \arg \max_v J = f(v) = 10 + \frac{1}{(v-0.16)^2 + 0.1} \sin\left(\frac{1}{v}\right)$ ,  $v \in R \setminus \{0\}$ ,

supusă la:  $0.01 \leq v \leq 0.3$ ;

c) PRI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2 + 2v_1$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$ ,

supusă la:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - v_1^2 - v_2^2 &\geq 0, \\ v_2 &\leq 0; \end{aligned}$$

d) PRI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$ ,

supusă la:

$$v_2^3 - v_1^2 \geq 0;$$

e) PRI:  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$ ,

supusă la:

$$\begin{aligned} v_1 &\geq 0, \\ v_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$1 - (v_1 - 4)^2 - v_2^2 \geq 0 ,$$

$$4 - (v_1 - 1)^2 - v_2^2 \geq 0 ;$$

f) PRI :  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = (v_1 - 1)^2 + (v_2 - \alpha)^2$  ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$  ,  $\alpha \in R$  ,

supusă la:

$$-v_2 + 4 \geq 0 ,$$

$$v_1 + \frac{1}{2} v_2^2 \geq 0 ,$$

$$-v_1 - v_2 + 4 \geq 0 ;$$

g) PRI :  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(v_1^2 + 4v_2^2 - 100)^2}$  ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$  ,

supusă la:

$$-v_2 + 4 \geq 0 ,$$

$$v_1 + \frac{1}{2} v_2 |v_2| \geq 0 ,$$

$$-v_1 - v_2 + 4 \geq 0 ;$$

h) PRI :  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(v_1 - 2)^2 + (v_2 - 2)^2 + 1}$  ,  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T \in R^2$  ,

supusă la:

$$|v_i| \leq \frac{1}{2} , \quad i = \overline{1,2} .$$