MATEMATICI ASISTATE DE CALCULATOR

BIBLIOGRAFIE

Precup, R.-E., L. Dragomir şi I. Bulaviţchi: *Matematici asistate de calculator. Aplicaţii*, Editura Politehnica, Timişoara, 2002.

Kilyeni, St.: *Metode numerice*, vol. 1 şi 2, ediţiile 1 şi 2, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 1997, 2000.

Beu, T.A.: *Calcul numeric în C*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

Năslău, P.: *Metode numerice*, Editura Politehnica, Timişoara, 1999.

Babescu, Gh., A. Kovacs, I. Stan, Gh. Tudor, R. Anghelescu şi A. Filipescu: *Analiză numerică*, Editura Politehnica, Timişoara, 2000.

MATEMATICI ASISTATE DE CALCULATOR

BIBLIOGRAFIE (CONTINUARE)

Ionescu, Vl. şi C. Popeea: *Optimizarea sistemelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Dragomir, T.-L.: *Tehnici de optimizare*, curs, vol. 1, Lito I.P.T.V. Timişoara, 1987.

Dumitrache, I. şi C. Buiu: *Algoritmi genetici. Principii fundamentale şi aplicații în automatică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2000.

Penny, J. şi G. Lindfield: *Numerical Methods Using MATLAB, Second edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

Ghinea, M. şi V. Firețeanu: *MATLAB. Calcul numeric. Grafică. Aplicații*, Editura Teora, Bucureşti, 1997.

ASPECTE INTRODUCTIVE PRIVIND TEORIA ERORILOR

Rezolvarea unor ***probleme*** de natură stiințifică şi tehnică implică aplicarea ***metodelor numerice***. O metodă numerică este considerată ***eficientă*** atunci când ***precizia calculelor*** numerice este bună, ceea ce se traduce prin ***erori reduse***.

1. Eroare. Aproximație

Fie o mărime numerică reală având **valoarea exactă** x, pentru care se cunoaşte **valoarea aproximativă** $x^{\sim}$ (rezultată în urma unui calcul numeric sau a unui experiment). Se zice că $x^{\sim}$ reprezintă o ***aproximație*** a valorii exacte x.

Eroarea ε a aproximației $x^{\sim}$ a lui x se defineşte:

$$\varepsilon = x - x^{\sim} . \tag{1.1}$$

$\varepsilon > 0$: $x^{\sim}$ **aproximează** pe x **prin lipsă**;

dacă $\varepsilon < 0$: $x^{\sim}$ **aproximează** pe x **prin adaos**.

(1.1) $\Rightarrow$ **formula de aproximare**:

$$x = x^{\sim} + \varepsilon . \tag{1.2}$$

Semnul erorii nu prezintă interes $\Rightarrow$ se defineşte ***eroarea absolută*** ε_a (notată uneori şi cu $\varepsilon_{a\,x}$):

$\varepsilon_a = |\,\varepsilon\,| = |\,x - x^{\sim}\,|\,.$ (1.3)

ε_a nu este suficientă pentru a caracteriza gradul de precizie al unei aproximări. Exemplu:

$x = 4\,,\quad x^{\sim} = 5\,,\quad y = 499,\quad y^{\sim} = 500 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{a\,x} = \varepsilon_{a\,y} = 1\,.$

Deci, nu se poate aprecia că $y^{\sim}$ aproximează mult mai bine pe y decât $x^{\sim}$ pe x.

$\Rightarrow$ este nevoie de introducerea unei alte mărimi, care să exprime corect gradul de precizie a unei aproximări: ***eroarea relativă*** a aproximației $x^{\sim}$ a lui x, notată cu ε_r (sau $\varepsilon_{r\,x}$):

$$\varepsilon_r = \frac{|\,\varepsilon_a\,|}{|\,x^{\sim}\,|} = \frac{|\,x - x^{\sim}\,|}{|\,x^{\sim}\,|}\,. \qquad (1.4)$$

În practică: exprimarea procentuală a erorii relative:

$\varepsilon_r^{\%} = 100 \cdot \varepsilon_r\,.$ (1.5)

Exemplul anterior:

$\varepsilon_{r\,x} = 1/5 = 0.2 = 20\ \%\,,\quad \varepsilon_{r\,y} = 1/500 = 0.002 = 0.2\ \%\,,$

$\Rightarrow$ a doua aproximare este mai precisă decât prima.

Din punctul de vedere al provenienței erorilor: clasificare în ***categorii***:

1) Erori inerente (inițiale) – apariție: modelul matematic asociat problemei practice nu corespunde în totalitate acestei probleme; nu pot fi influențate de metoda de calcul.

2) Erori de metodă – apariție: utilizarea unei anumite metode numerice în rezolvarea problemei; pot fi micşorate prin alegerea celei mai adecvate metode de rezolvare.

3) Erori de calcul – legate exclusiv de metodele de calcul numeric, de modul de efectuare a calculelor şi de tehnica de calcul utilizată.

Erorile de calcul sunt, la rândul lor, de trei ***tipuri***:

A) Erori de trunchiere – legate exclusiv de metodele numerice utilizate. Apariție: procese de calcul numeric cu convergență teoretic infinită sunt înlocuite cu aceleaşi procese, dar cu convergență practic finită – la toate metodele iterative sau de aproximație.

Exemplu: calculul valorilor e^x pentru diverse valori ale argumentului x cu dezvoltarea în serie MacLaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^k}{k\,!} + \ldots \qquad (1.6)$$

Numărul de termeni este infinit. În calcule practice se folosește, însă, un număr finit rezonabil de termeni (5, 6, 7, 8, …) dependent de valoarea lui x. Termenii omiși determină apariția erorii de trunchiere.

Nu pot fi calculate exact, dar pot fi estimate.

B) Erorile de rotunjire –toate calculele se pot efectua numai considerând un număr finit de cifre pentru valorile numerice, deși anumite valori numerice au mai multe cifre sau chiar o infinitate de cifre (în cazul numerelor iraționale).

Exemplu: se efectuează calculele cu valori numerice având 6 cifre semnificative. Valoarea numerică x = 842.78425 se poate aproxima:

- prin lipsă, prin valoarea: $\tilde{x}$= 842.784, cu $\varepsilon_{r\,x}$= 0.000030 %;
- prin adaos, prin valoarea: $\tilde{x}$= 842.785, cu $\varepsilon_{r\,x}$= 0.000089 %.

Erorile de rotunjire pot fi cauzate și de conversiile dintr-un sistem de numerație cu o bază într-unul cu o altă bază.

C) Erorile de propagare – apar datorită erorilor din pașii anteriori ai unui proces iterativ de calcul.

2. Reprezentarea în virgulă mobilă. Rotunjire

În sistemele de calcul un număr real cu valoarea exactă x se reprezintă în mod curent în ***virgulă mobilă***:

$$x = f \cdot b^e \;, \tag{2.1}$$

b – baza sistemului de numerație (b = 2),

f – mantisa,

e – exponentul (caracteristica).

Exemplu: Se consideră reprezentarea numărului:

$x = 10.01_2 = 1.001_2 \bullet 2^1 = 0.1001_2 \bullet 2^2 = 0.01001_2 \bullet 2^3 =$

$= 100.1_2 \bullet 2^{-1} = 1001_2 \bullet 2^{-2} = 10010_2 \bullet 2^{-3}$.

$\Rightarrow$ pentru o anumită valoare numerică există un număr nelimitat de exprimări în virgulă mobilă. Prezintă interes ***reprezentarea normalizată***, unică, la care mantisa satisface:

$$\frac{1}{b} \le |f| < 1 \,. \tag{2.2}$$

Particularizare în cazul b = 2 a relațiilor (2.1) şi (2.2):

$$x = f \cdot 2^e \,, \tag{2.3}$$

$$0.1_2 \le |\, f \,| < 1_2 \,. \tag{2.4}$$

Reprezentarea normalizată (exemplu): $x = 0.1001_2 \cdot 2^2$.

Se presupune că *mantisa normalizată conține t cifre semnificative*. O valoare numerică reală exactă x cu număr de cifre mai mare decât t se poate scrie:

$$x = f \cdot 2^e + g \cdot 2^{e-t} \,, \tag{2.5}$$

unde mantisa normalizată f conține primele t cifre semnificative ale lui x.

Exemplu: Se lucrează cu t = 6 cifre semnificative pentru valoarea reală exactă $x = 1011.1101_2$. Aplicând (2.5) ⇒

$$x = 0.110111101_2 \cdot 2^5 = 0.110111_2 \cdot 2^5 + 0.101_2 \cdot 2^{5-6} =$$
$$= 0.110111_2 \cdot 2^5 + 0.101 \cdot 2^{-1} .$$

Aproximația $x^{\sim}$ a valorii exacte x are mantisa normalizată cu t cifre semnificative. ***Rotunjirea:*** luarea în considerare a lui g din (2.5) la stabilirea valorii mantisei aproximației $x^{\sim}$.

Metode de rotunjire:

A) Rotunjirea prin tăiere –neglijarea lui g la stabilirea lui $x^{\sim}$:

$$x^{\sim} = f \cdot 2^e . \tag{2.6}$$

Erorarea relativă datorată rotunjirii prin tăiere:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|\, x^{\sim} |} = \frac{|\, g \,| \cdot 2^{e-t}}{|\, f \,| \cdot 2^e} \leq \frac{1 \cdot 2^{e-t}}{0.1 \cdot 2^e} = 2^{-t+1} . \tag{2.7}$$

Exemplu: aplicarea rotunjirii prin tăiere ⇒

$$x^{\sim} = 0.110111_2 \cdot 2^5 ,\ \ \varepsilon_r \leq 2^{-6+1} = 2^{-5} .$$

B) Rotunjirea simetrică – obținerea lui $x^{\sim}$ pe baza lui (2.8):

$$x^{\sim} = \begin{cases} f \cdot 2^{e}, & \text{dacă } |g| < 0.1_2, \\ f \cdot 2^{e} + 2^{e-t}, & \text{dacă } |g| \geq 0.1_2 \text{ şi } f > 0, \\ f \cdot 2^{e} - 2^{e-t}, & \text{dacă } |g| \geq 0.1_2 \text{ şi } f < 0. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Eroarea relativă datorată rotunjirii simetrice:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|x^{\sim}|} \leq \frac{0.1 \cdot 2^{e-t}}{0.1 \cdot 2^{e}} = 2^{-t}. \qquad (2.9)$$

Exemplu: (2.8) şi (2.9) se particularizează sub forma:

$$x^{\sim} = 0.110111_2 \cdot 2^{5} + 2^{5-6} = 0.110111_2 \cdot 2^{5} + 2^{-1} =$$
$$= 0.110111_2 \cdot 2^{5} + 0.000001_2 \cdot 2^{5} = 0.111000_2 \cdot 2^{5},\ \varepsilon_r \leq 2^{-6}.$$

3. Propagarea erorilor

Operații aritmetice cu valori aproximative ⇒ necesitatea cunoaşterii efectului erorilor operanzilor asupra erorii rezultatului şi asupra operațiilor următoare.

Fie cei doi operanzi cu valorile exacte x şi y şi valorile aproximative $x^{\sim}$, respectiv $y^{\sim}$ (din (1.2)):

$$x = x^{\sim} + \varepsilon_x,\ \ y = y^{\sim} + \varepsilon_y. \qquad (3.1)$$

Operațiile aritmetice elementare:

A) Adunarea.

$x + y = x^{\sim} + y^{\sim} + \varepsilon_x + \varepsilon_y$ – din (3.1), dar, din (1.2) $\Rightarrow x + y = x^{\sim} + y^{\sim} + \varepsilon_{x+y}$.

$\Rightarrow \varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$. (3.2)

Se aplică proprietățile modulului $\Rightarrow$

$\varepsilon_{a\ x+y} \leq \varepsilon_{a\ x} + \varepsilon_{a\ y}$. (3.3)

Exprimarea erorii relative:

$$\varepsilon_{r\ x+y} = \frac{\varepsilon_{a\ x+y}}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} \leq \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} + \frac{\varepsilon_{a\ y}}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|x^{\sim}|} \cdot \frac{|x^{\sim}|}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} + \frac{\varepsilon_{a\ y}}{|y^{\sim}|} \cdot \frac{|y^{\sim}|}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} = \tag{3.4}$$

$$= \varepsilon_{r\ x} \cdot \frac{|x^{\sim}|}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} + \varepsilon_{r\ y} \cdot \frac{|y^{\sim}|}{|x^{\sim} + y^{\sim}|} .$$

Observații:

1. Eroarea absolută a sumei nu depăşeşte suma erorilor absolute ale termenilor.
2. Dacă operanzii sunt de acelaşi semn, eroarea relativă a sumei nu depăşeşte suma erorilor relative ale termenilor.

B) Scăderea. Calcule similare adunării:

$x - y = x^{\sim} - y^{\sim} + \varepsilon_x - \varepsilon_y$ – din (3.1), dar, din (1.2) $\Rightarrow x - y = x^{\sim} - y^{\sim} + \varepsilon_{x-y}$.

$$\Rightarrow \varepsilon_{x-y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y \, . \tag{3.5}$$

Se aplică din nou proprietățile modulului $\Rightarrow$

$$\varepsilon_{a\,x-y} \le \varepsilon_{a\,x} + \varepsilon_{a\,y} \, . \tag{3.6}$$

Exprimarea erorii relative:

$$\varepsilon_{r\,x-y} = \frac{\varepsilon_{a\,x-y}}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} \le \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}\,|} \cdot \frac{|\,x^{\sim}\,|}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,y^{\sim}\,|} \cdot \frac{|\,y^{\sim}\,|}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} = \tag{3.7}$$

$$= \varepsilon_{r\,x} \cdot \frac{|\,x^{\sim}\,|}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} + \varepsilon_{r\,y} \cdot \frac{|\,y^{\sim}\,|}{|\,x^{\sim} - y^{\sim}\,|} \, .$$

Observații:

1. Eroarea absolută a diferenței nu depăşeşte suma erorilor absolute ale termenilor.
2. Precizia este puternic afectată când cei doi operanzi **au acelaşi semn şi sunt de valori apropiate** $\Rightarrow$ astfel de scăderi trebuie evitate.

C) Înmulțirea.

$xy = (x^{\sim} + \varepsilon_x)(y^{\sim} + \varepsilon_y) = x^{\sim}y^{\sim} + x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y$ – din (3.1).

Termenul $\varepsilon_x\varepsilon_y$ este neglijabil $\Rightarrow xy \approx x^{\sim}y^{\sim} + x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x$,

$$\Rightarrow \varepsilon_{xy} = x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x \,. \tag{3.8}$$

Majorant al erorii absolute – din (3.8):

$$\varepsilon_{a\,xy} \le |\,x^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,y} + |\,y^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,x} \,. \tag{3.9}$$

Majorant al erorii relative – din (3.9):

$$\varepsilon_{r\,xy} = \frac{\varepsilon_{a\,xy}}{|\,x^{\sim}y^{\sim}\,|} \le \frac{|\,x^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,y} + |\,y^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}y^{\sim}\,|} = \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,y^{\sim}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}\,|} = \varepsilon_{r\,x} + \varepsilon_{r\,y} \,. \tag{3.10}$$

Operanzi nenuli ! $\Rightarrow$ concluzie similară adunării.

D) Împărțirea. Calcule similare înmulțirii:

$$\frac{x}{y} = \frac{x^{\sim} + \varepsilon_x}{y^{\sim} + \varepsilon_y} = \frac{(x^{\sim} + \varepsilon_x)(y^{\sim} - \varepsilon_y)}{y^{\sim 2} - \varepsilon_y^{2}} = \frac{x^{\sim}y^{\sim} + y^{\sim}\varepsilon_x - x^{\sim}\varepsilon_y - \varepsilon_x\varepsilon_y}{y^{\sim 2} - \varepsilon_y^{2}} .$$

Termenii $\varepsilon_x\varepsilon_y$ şi ε_y^{2} sunt neglijabili $\Rightarrow$

$$\frac{x}{y} \approx \frac{x^{\sim}}{y^{\sim}} + \frac{\varepsilon_x}{y^{\sim}} - \frac{x^{\sim}\varepsilon_y}{y^{\sim 2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{x/y} = \frac{\varepsilon_x}{y^{\sim}} - \frac{x^{\sim}\varepsilon_y}{y^{\sim 2}} \,. \tag{3.11}$$

Majorant al erorii absolute – din (3.11):

$$\varepsilon_{a\,x/y} \le \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,\tilde{y}\,|} + \frac{|\,\tilde{x}\,|\,\varepsilon_{a\,y}}{\tilde{y}^{2}} \qquad (3.12)$$

Majorant al erorii relative – din (3.12):

$$\varepsilon_{r\,x/y} = \frac{\varepsilon_{a\,x/y}}{|\,\tilde{x}/\tilde{y}\,|} \le \frac{\varepsilon_{a\,x} / |\,\tilde{y}\,| + \varepsilon_{a\,y} / |\,\tilde{y}\,|^{2}}{|\,\tilde{x}\,| / |\,\tilde{y}\,|} = \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,\tilde{x}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,\tilde{y}\,|} = \varepsilon_{r\,x} + \varepsilon_{r\,y}. \qquad (3.13)$$

Operanzi nenuli ! ⇒ concluzie similară adunării.

Exemplu (ilustrarea efectului propagării erorilor): Se lucrează cu două zecimale exacte şi aproximare prin lipsă, să se calculeze integrala I_2 dacă se dă:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx\,,\ \ n \in N\,,$$

iar pentru calculul integralei se aplică relația de recurență:

$I_n + 5\,I_{n-1} = 1/n\,,\ \ \forall\, n \in N^{*}\,,\ \ I_0 = 0.18\,.$

Soluție: Se aplicând relația de recurență ⇒

$I_1 = 1 – 5\,I_0 = 1 – 0.9 = 0.1\,,$

$I_2 = 1/2 – 5\,I_1 = 0.5 – 0.5 = 0\,.$

Rezultat eronat ! (integrala este de fapt strict pozitivă). Explicație: s-au acumulat relativ rapid erori de rotunjire provocate de diferențe între numere apropiate.

ELEMENTE DE CALCUL NUMERIC MATRICEAL

O **matrice** $\underline{A}$ **de dimensiune m** $\times$ **n** – tablou dreptunghiular cu elemente reale sau complexe dispuse pe m linii şi n coloane:

$$\underline{A}=\left[a_{ij}\right]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Transpusa matricei $\underline{A}$ este matricea $\underline{A}^T$, de dimensiune $n \times m$, obținută prin schimbarea liniilor cu coloanele:

$$\underline{A}^T=\left[a_{ji}\right]_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Transpusa sumei şi transpusa produsului au proprietățile:

$$(\underline{A}+\underline{B})^T=\underline{A}^T+\underline{B}^T\ , \tag{3}$$

$(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$. (4)

Conjugata unei matrice $\underline{A}$ este matricea $\underline{\bar{A}}$, care se obține prin înlocuirea elementelor lui $\underline{A}$ cu conjugatele lor:

$$\underline{\overline{A}} = [\overline{a}_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} . \quad (5)$$

Dacă $n = 1$, atunci matricea are dimensiunea $m \times 1$ şi este de tip ***coloană***:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} . \quad (6)$$

Dacă $m = 1$, atunci matricea are dimensiunea $1\times n$ şi este de tip ***linie*** (transpusa unei coloane):

$$\underline{b}^T = [b_1 \ \ b_2 \ \ \cdots \ \ b_n] . \quad (7)$$

Dacă $m=n$, atunci matricea $\underline{A}$ este ***pătratică de ordinul n***.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***simetrică*** dacă şi numai dacă $\underline{A}^T = \underline{A}$, ceea ce este echivalent cu egalitățile $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Exemplu de matrice simetrică: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***antisimetrică*** dacă şi numai dacă $\underline{A}^T=-\underline{A}$, adică $a_{ij}=-a_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$. Se observă: $a_{ii}=0$, $i=\overline{1,n}$.

Exemplu de matrice antisimetrică: $\underline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***superior triunghiulară***, dacă şi numai dacă $a_{ij}=0$, $\forall\ i\geq j$. Exemplu de matrice superior triunghiulară: $\underline{A}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***inferior triunghiulară***, dacă şi numai dacă $a_{ij}=0$, $\forall\ i\leq j$. Exemplu de matrice inferior triunghiulară: $\underline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***superior trapezoidală***, dacă şi numai dacă $a_{ij}=0$, $\forall\ i>j$. Exemplu de matrice superior trapezoidală: $\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***inferior trapezoidală***, dacă şi numai dacă $a_{ij} = 0, \ \forall \ i < j$. Exemplu de matrice

inferior trapezoidală: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***diagonală***, dacă şi numai dacă $a_{ij} = 0, \ \forall \ i \neq j$:

$$\underline{A} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Dacă la o matrice diagonală elementele de pe diagonala principală au valoare unitară, atunci ea este ***matricea unitate***:

$$\underline{I} = diag(1, 1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Matrice tridiagonală:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Matrice Hessenberg:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Matrice bloc diagonală:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} \underline{A}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{A}_p \end{bmatrix}, \tag{12}$$

cu blocurile $\underline{A}_1$, …, $\underline{A}_p$ – matrice pătratice, nu neapărat de acelaşi ordin.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***diagonal dominantă***, dacă şi numai dacă $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i = \overline{1,n}$. Exemplu de matrice diagonal dominantă: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***ortogonală***, dacă şi numai dacă $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, adică $\underline{A} \cdot \underline{A}^T = \underline{I}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***hermitiană***, dacă şi numai dacă $\underline{A} = (\bar{\underline{A}})^T$. Orice matrice reală simetrică este hermitiană.

O matrice reală pătratică $\underline{A}$ este ***singulară***, dacă şi numai dacă det $\underline{A}$ = 0; în cazul det $\underline{A} \neq 0$, matricea $\underline{A}$ este ***nesingulară***.

1. Definirea şi proprietăţile inversei

Se consideră matricea pătratică reală nesingulară $\underline{A}$ de ordinul n. **Matricea inversă** $\underline{A}^{-1}$ a matricei $\underline{A}$ se defineşte ca fiind acea matrice (pătratică reală de ordinul n) care satisface:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}, \tag{1.1}$$

în care $\underline{I}$ este matricea unitate de ordinul n.

$\underline{A}^{-1}$ se poate exprima:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \cdot \underline{A}^{+} \ , \qquad (1.2)$$

det $\underline{A}$ – număr real nenul, numit ***determinantul*** matricei $\underline{A}$ şi

$\underline{A}^{+}$ – **matricea adjunctă**. $\underline{A}^{+}$ este transpusa matricei obţinute prin înlocuirea elementelor lui $\underline{A}$ cu **complemenţii lor algebrici** (**cofactorii** lor); cofactorul lui a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ este minorul înmulţit cu $(-1)^{i+j}$.

(1.2) $\Rightarrow$ modalitate de calcul al inversei, care este **greu algoritmizabilă** şi, în plus, necesită un **volum mare de calcule**.

Exemplu: Fie $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Să se calculeze $\underline{A}^{-1}$.

Soluţie: Se analizează dacă $\underline{A}$ este inversabilă:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\det \underline{A} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\underline{A}$ este inversabilă.

Transpusa matricei $\underline{A}$:

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matricea adjunctă:

$$\underline{A}^+ = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^+ = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se aplică relația (1.2) $\Rightarrow$ $\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Proprietăți ale operației de inversare:

$$\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{A}}, \tag{1.3}$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}, \tag{1.4}$$

$$(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}. \tag{1.5}$$