

# REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚILOR ȘI SISTEMELOR DE ECUAȚII ALGEBRICE NELINIARE

**Forma generală** a ecuației:

$$f(x)=0, \tag{1}$$

cu  $f : I \subset R \rightarrow R$ . În particular,  $f$  – polinom / adus la o formă polinomială, dar și ecuațiile transcendente.

Rezolvarea ecuației (1) = găsirea zerourilor funcției  $f$ , adică a valorilor  $x = c$  care satisfac (1).

**Categorii de metode** de rezolvare numerică a ecuațiilor algebrice neliniare:

a) metode de *separare* sau *localizare* a soluțiilor ecuației (1) – de izolare a unor subdomenii ale domeniului de definiție  $I$ , care să conțină câte unul din zerourile funcției  $f$  (a se vedea *șirul lui Rolle*);

b) metode de *determinare*, cu o precizie a priori fixată, a unei soluții care a fost izolată în prealabil, pornind de la o valoare aproximativă a acesteia;

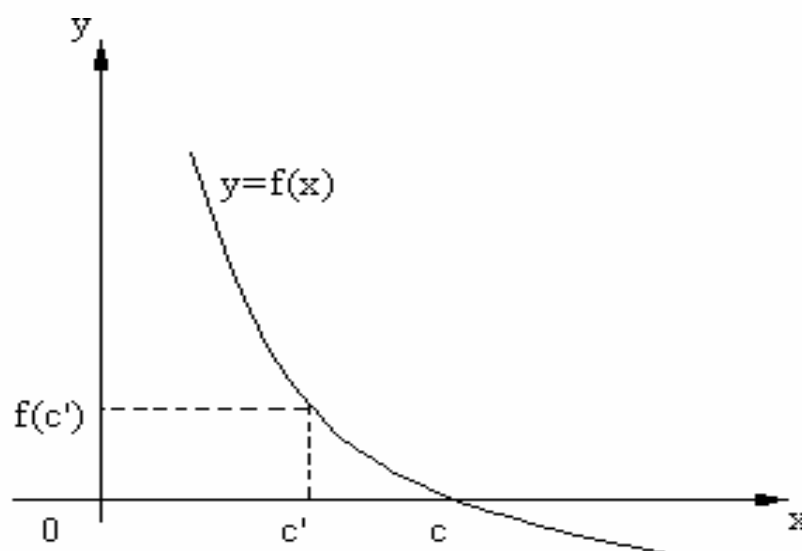
c) metode de *determinare a tuturor soluțiilor* aplicabile, de regulă, în cazul în care  $f$  este un polinom.

## Soluție aproximativă

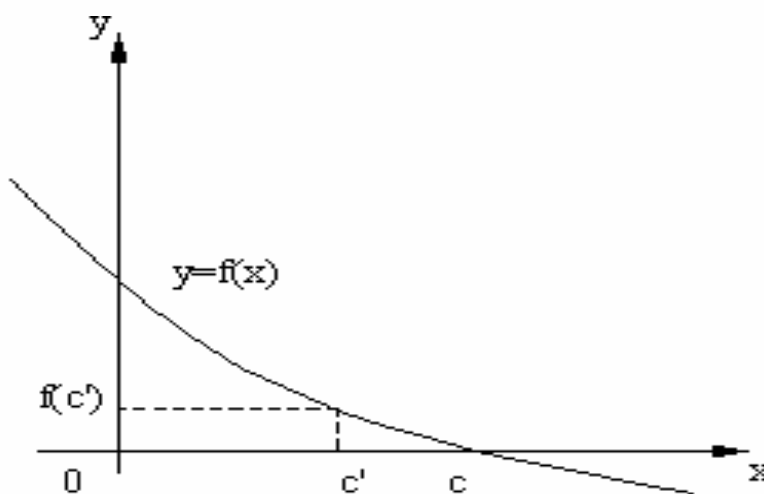
Se presupune că  $c$  este valoarea exactă a unei soluții a ecuației (1), iar  $c'$  o valoare aproximativă a acestei soluții.

Soluția aproximativă se poate defini:

- 1) o valoare  $x=c'$ :  $|c' - c| < \varepsilon_x$ , cu  $\varepsilon_x > 0$  și  $f(c)=0$ ;
- 2) o valoare  $x=c'$ :  $|f(c')| < \varepsilon_f$ , cu  $\varepsilon_f > 0$  și  $f(c)=0$ .



Modul 1):



Modul 2):

## 1. Metode de calcul al unei soluții reale a unei ecuații algebrice neliniare

Soluția reală a ecuației (1) – separată în prealabil în intervalul  $[a, b]$ :

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Două metode de partiționare a intervalului:

### Metoda biseției (înjumătățirii intervalului)

Este destinată rezolvării ecuației (1.1), pentru care s-a separat în prealabil o soluție în intervalul  $[a, b]$ :

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \quad (1.2)$$

Se consideră  $f$  – continuă pe  $[a, b]$ ; soluția va fi determinată cu erorile admise  $\varepsilon_x$  (pentru soluție) și  $\varepsilon_f$  (pentru funcție).

*Trăsătură caracteristică:* pornind de la  $[a, b]$ , la fiecare pas se restrânge domeniul în care se caută soluția prin înjumătățirea intervalului de la pasul anterior, până la atingerea preciziei dorite.

*Avantaj:* simplă.

*Dezavantaj:* slab convergentă.

**Algoritmul metodei biseției – etape:**

I) Se inițializează limitele intervalului de căutare, “ $r$ ” și “ $s$ ”, cu valorile limitelor intervalului în care s-a separat soluția:

$$r^0 = a, \quad s^0 = b \quad (1.3)$$

(indicele superior – iterația curentă).

II) La pasul de calcul  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , se determină noua valoare a soluției:

$$x^k = \frac{r^{k-1} + s^{k-1}}{2} . \quad (1.4)$$

III) La același pas  $k$  se calculează  $f(x^k)$  și  $f(r^{k-1}) \Rightarrow$  noile limite ale intervalului de căutare:

$$\text{dacă } f(x^k) \cdot f(r^{k-1}) < 0 \Rightarrow r^k = r^{k-1} \text{ și } s^k = x^k ; \quad (1.5)$$

$$\text{dacă } f(x^k) \cdot f(r^{k-1}) > 0 \Rightarrow r^k = x^k \text{ și } s^k = s^{k-1} ; \quad (1.6)$$

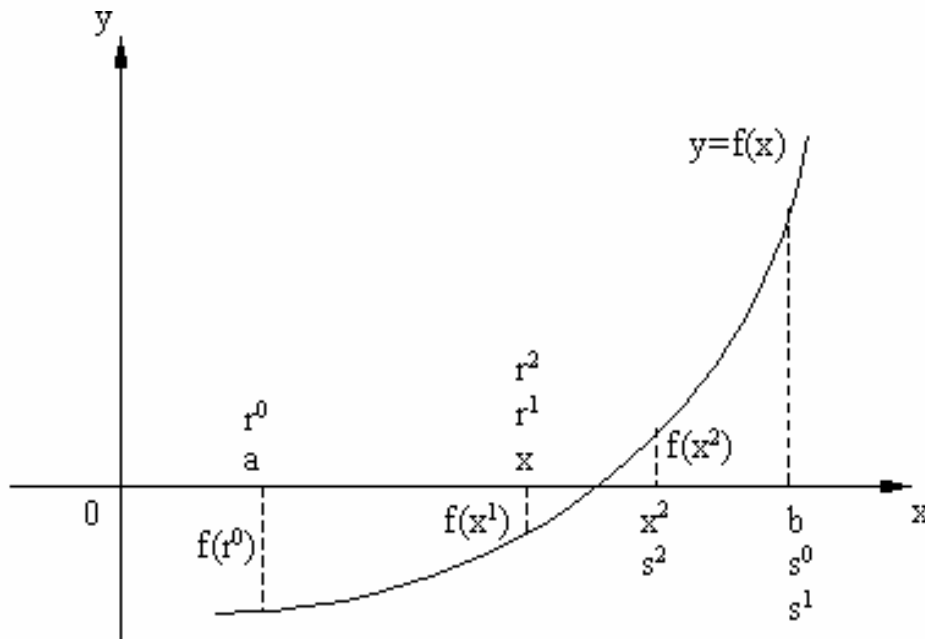
$$\text{dacă } f(x^k) \cdot f(r^{k-1}) = 0 \Rightarrow \text{calcul terminat și } c = x^k ; \quad (1.7)$$

IV) Procesul de calcul se consideră terminat când sunt îndeplinite condițiile (1.8) și / sau (1.9):

$$|s^k - r^k| \leq \varepsilon_x ; \quad (1.8)$$

$$|f(x^k)| \leq \varepsilon_f . \quad (1.9)$$

Interpretarea geometrică a metodei biseției:



**Exemplu:** Se consideră ecuația:

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x - 10 \cdot x + 3,$$

pentru care s-a separat o soluție în intervalul  $[-1, 1]$ . Să se determine soluția ecuației utilizând metoda bisecției, erorile admise fiind  $\varepsilon_x = 10^{-3}$  și  $\varepsilon_f = 10^{-2}$ .

*Soluție:* Se parcurg etapele metodei bisecției:

I) Inițializări:

$$r^0 = -1, \quad s^0 = 1, \quad |r^0 - s^0| = 2.$$

*Iterația  $k = 1$ :*

$$\text{II) } x^1 = \frac{r^0 + s^0}{2} = 0;$$

$$\text{III) } f(x^1) = f(0) = 3, \quad f(r^0) = f(-1) = 9.885,$$

$$f(x^1) \cdot f(r^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^1 = x^1 = 0, \quad s^1 = s^0 = 1.$$

Se verifică dacă sunt îndeplinite condițiile de terminare (1.8)

și (1.9):

$$|r^1 - s^1| = 1 > \varepsilon_x \quad \text{și} \quad |f(x^1)| = 3 > \varepsilon_f.$$

Nu sunt îndeplinite  $\Rightarrow$  algoritmul se continuă cu:

*Iterația  $k = 2$ :*

$$\text{II)} \quad x^2 = \frac{r^1 + s^1}{2} = 0.5 ;$$

$$\text{III)} \quad f(x^2) = f(0.5) = -0.9074, \quad f(r^1) = f(0) = 3,$$

$$f(x^2) \cdot f(r^1) < 0 \Rightarrow r^2 = r^1 = 0, \quad s^2 = x^2 = 0.5.$$

$$|r^2 - s^2| = 0.5 > \varepsilon_x \quad \text{și} \quad |f(x^2)| = 0.9074 > \varepsilon_f \Rightarrow$$

Se trece la iterația următoare:

*Iterația  $k = 3$ :*

$$\text{II)} \quad x^3 = \frac{r^2 + s^2}{2} = 0.25 ;$$

$$\text{III)} \quad f(x^3) = f(0.25) = 1.011, \quad f(r^2) = f(0) = 3,$$

$$f(x^3) \cdot f(r^2) > 0 \Rightarrow r^3 = x^3 = 0.25, \quad s^3 = s^2 = 0.5.$$

$$|r^3 - s^3| = 0.25 > \varepsilon_x \quad \text{și} \quad |f(x^3)| = 1.011 > \varepsilon_f \Rightarrow$$

Algoritmul se continuă.

*Iterația  $k = 4$ :*

$$\text{II)} \quad x^4 = \frac{r^3 + s^3}{2} = 0.375 ;$$

$$\text{III) } f(x^4) = f(0.375) = 0.037, \quad f(r^3) = f(0.25) = 1.011,$$

$$f(x^4) \cdot f(r^3) > 0 \Rightarrow r^4 = x^4 = 0.375, \quad s^4 = s^3 = 0.5.$$

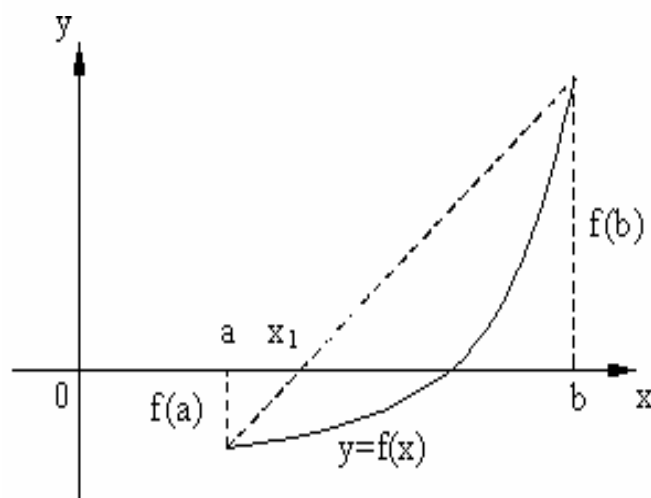
$$|r^4 - s^4| = 0.125 > \varepsilon_x \quad \text{și} \quad |f(x^4)| = 0.375 > \varepsilon_f.$$

Erorile au scăzut, însă nu suficient de mult pentru ca cele două condiții de terminare să fie îndeplinite  $\Rightarrow$  alte iterații.

**Metoda falsei poziții (metoda coardei, metoda secantei, metoda împărțirii intervalului în părți proporționale)**

*Avantaj:* mai rapid convergentă.

*Trăsătură caracteristică:* pornind de la  $[a, b]$ , la fiecare pas se restrânge domeniul de căutare a soluției, prin împărțirea intervalului de la pasul anterior în raportul valorilor funcției la capetele intervalului.



Interpretarea geometrică:

Coarda:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (1.10)$$

$\Rightarrow$  abscisa punctului de intersecție cu  $Ox$ :

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (1.11)$$

**Algoritmul metodei falsei poziții – etape:**

I) Se inițializează limitele intervalului curent de căutare, “ $r$ ” și “ $s$ ”:

$$r^0 = a, \quad s^0 = b \quad (1.12)$$

și se calculează  $f(r^0)$  și  $f(s^0)$ .

II) La un pas oarecare  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , al procesului iterativ de calcul, se calculează noua valoare a soluției:

$$x^k = \frac{r^{k-1} \cdot f(s^{k-1}) - s^{k-1} \cdot f(r^{k-1})}{f(s^{k-1}) - f(r^{k-1})}. \quad (1.13)$$

III) La același pas  $k$  se calculează  $f(x^k)$ , rezultând noile limite ale intervalului de căutare,  $r^k$  și  $s^k$ , conform (1.5) ... (1.7), împreună cu  $f(r^k)$  și  $f(s^k)$ .

IV) Calculul se termină când sunt îndeplinite condițiile (1.8) și / sau (1.9).

**Exemplu:** Se consideră ecuația de la exemplul anterior; să se rezolve utilizând metoda falsei poziții.

*Soluție:* Se aplică metoda falsei poziții:

I) Inițializări:

$$r^0 = -1, \quad s^0 = 1$$

și se calculează valorile funcției  $f$  în  $r^0$  și  $s^0$ :

$$f(r^0) = f(-1) = 9.885, \quad f(s^0) = f(1) = -3.885.$$

Pentru  $k = 1, 2, 3, \dots$ , se repetă etapele II) ... IV), până când condițiile etapei IV) sunt îndeplinite:

*Iterația  $k = 1$ :*

II) Se determină  $x^1$  cu (1.13):

$$x^1 = \frac{r^0 \cdot f(s^0) - s^0 \cdot f(r^0)}{f(s^0) - f(r^0)} = \frac{-(-3.885) - 9.885}{-3.885 - 9.885} = 0.4357.$$

III) Se determină valoarea funcției  $f$  în  $x^1$ :

$$f(x^1) = f(0.4375) = -0.426.$$

$$f(x^1) \cdot f(r^0) < 0 \Rightarrow \text{din (1.5): } r^1 = r^0 = -1, \quad s^1 = x^1 = 0.4357$$

și valorile corespunzătoare ale funcției  $f$ :

$$f(r^1) = f(-1) = 9.855, \quad f(s^1) = f(0.4357) = -0.426.$$

Se verifică condițiile de terminare a algoritmului:

$$|r^1 - s^1| = 1.4357 > \varepsilon_x, \quad |f(x^1)| = 0.426 > \varepsilon_f.$$

(1.8) și (1.9) nu sunt satisfăcute  $\Rightarrow$  iterația următoare:

*Iterația*  $k = 2$ :

II) Se determină  $x^2$ :

$$x^2 = \frac{r^1 \cdot f(s^1) - s^1 \cdot f(r^1)}{f(s^1) - f(r^1)} = \frac{-(-0.426) - 0.4357 \cdot 9.885}{-0.426 - 9.885} = 0.3764$$

III) Se determină  $f(x^2)$ :

$$f(x^2) = f(0.3764) = 0.265 .$$

$$f(x^2) \cdot f(r^1) > 0 \Rightarrow \text{din (1.6): } r^2 = x^2 = 0.3764, \quad s^2 = s^1 = 0.4357.$$

$$f(r^2) = f(0.3764) = 0.265, \quad f(s^2) = f(0.4357) = -0.426 .$$

Se verifică din nou condițiile de terminare a calculelor:

$$|r^2 - s^2| = 0.0587 > \varepsilon_x, \quad |f(x^2)| = 0.265 > \varepsilon_f .$$

(1.8) și (1.9) nu sunt satisfăcute  $\Rightarrow$  iterația următoare:

Erorile au scăzut semnificativ, scăderea lor fiind mai rapidă decât în cazul metodei biseției, însă încă nu s-a ajuns la îndeplinirea condițiilor de terminare a calculelor  $\Rightarrow$  algoritmul se continuă.

## **2. Generalități privind soluționarea numerică a sistemelor de ecuații algebrice neliniare**

Forna implicită a unui sistem de ecuații algebrice neliniare de ordinul “ $n$ ” – întodeauna posibilă:



II. *metode de determinare*, cu o precizie fixată a priori, a unei soluții separate în prealabil.

În categoria II.:

- a) metode bazate pe **exprimarea explicită echivalentă** a ecuațiilor sistemului (2.1) – *metode de aproximații succesive*;
- b) metode care utilizează derivatele parțiale ale funcțiilor  $f_i$  – *metode de tip Newton*;
- c) metode de *descreștere* sau de *coborâre* sau de *gradient*.

Doar a) și b).

### 3. Metode bazate pe exprimarea explicită echivalentă a ecuațiilor sistemului

Se cere să se determine o soluție  $\underline{c}$  a acestui sistemului

(2.1), separată în prealabil în domeniul  $D = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbf{R}^n$ ,

cu erorile maxim admise  $\varepsilon_x$  (pentru valorile variabilelor) și  $\varepsilon_f$  (pentru valorile funcțiilor).

*Trăsătură caracteristică:* înlocuirea exprimărilor implicite (2.1) ale ecuațiilor sistemului cu exprimările explicite echivalente:



II) La un pas oarecare  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , al procesului iterativ de calcul, se determină noile valori ale variabilelor:

$$x_i^k = g_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

III) Calculul este terminat atunci când sunt îndeplinite condițiile (3.7) și / sau (3.8):

$$|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon_x, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.7)$$

$$|f_i(\underline{x}^k)| \leq \varepsilon_f, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.8)$$

Condițiile de convergență suficiente:

$$\left| \frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} \right| < 1, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3.9)$$

### **Metoda aproximațiilor succesive în versiunea Gauss-Seidel**

*Diferență:* relația (3.6), care devine:

$$x_i^k = g_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.10)$$

$\Leftrightarrow$  apar valorile “noi” ale variabilelor care au fost recalulate deja la iterația  $k$ .

**Exemplu:** Să se rezolve sistemul algebric neliniar:

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_2x_3 - 5x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_1 - \ln x_3 = 0 \\ x_3^2 - x_1x_2 - 2x_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

cu metoda Gauss-Seidel, cu erorile maxime admise  $\varepsilon_x = 0,001$  și  $\varepsilon_f = 0,1$ , cunoscând că s-a separat o soluție în domeniul  $D = [0; 10] \times [0; 10] \times [1; 10]$ .

*Soluție:* Rescrierea sistemului într-o formă cu exprimarea explicită a variabilelor, de forma (3.1):

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2x_3 + 5x_1 - 1)} \\ x_2 = \sqrt{2x_1 + \ln x_3} \\ x_3 = \sqrt{x_1x_2 + 2x_3 + 8} \end{cases} .$$

*Iterația  $k = 0$ :*

I) Se inițializează  $\underline{x}$ , de exemplu cu:  $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ .

Valorile funcțiilor  $f_1$ ,  $f_2$  și  $f_3$  pentru valorile inițiale ale variabilelor:

$$f_1(\underline{x}^0) = 2 \cdot 10^2 - 10 \cdot 10 - 5 \cdot 10 + 1 = 51 ,$$

$$f_2(\underline{x}^0) = 10^2 - 2 \cdot 10 - \ln 10 = 77.7 ,$$

$$f_3(\underline{x}^0) = 10^2 - 10 \cdot 10 - 2 \cdot 10 - 8 = -28 .$$

*Observație:* Inițializarea se poate face și cu alte valori și se pot urmări efectele asupra evoluției convergenței procesului de calcul în funcție de aceste valori inițiale.

*Iterația  $k = 1$ :*

II) Se utilizează (3.10):

$$x_1^1 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^0 \cdot x_3^0 + 5 \cdot x_1^0 - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (10 \cdot 10 + 5 \cdot 10 - 1)} = 8.631$$

$$x_2^1 = \sqrt{2 \cdot x_1^1 + \ln x_3^0} = \sqrt{2 \cdot 8.631 + \ln 10} = 4.423 ,$$

$$x_3^1 = \sqrt{x_1^1 \cdot x_2^1 + 2 \cdot x_3^0 + 8} = \sqrt{8.631 \cdot 4.423 + 2 \cdot 10 + 8} = 8.135 .$$

Se calculează erorile:

$$|x_1^1 - x_1^0| = |8.631 - 10| = 1.369 > \varepsilon_x ,$$

$$|x_2^1 - x_2^0| = |4.423 - 10| = 5.577 > \varepsilon_x ,$$

$$|x_3^1 - x_3^0| = |8.135 - 10| = 1.865 > \varepsilon_x .$$

$$|f_1(\underline{x}^1)| = 70.86 > \varepsilon_f ,$$

$$|f_2(\underline{x}^1)| = 0.206 > \varepsilon_x ,$$

$$|f_3(\underline{x}^1)| = 3.73 > \varepsilon_x .$$

Condițiile de terminare a calculelor nu sunt îndeplinite  
 $\Rightarrow$  necesară continuarea algoritmului cu iterația următoare:

*Iterația  $k = 2$ :*

II) Se calculează  $\underline{x}^2$  utilizând (3.10):

$$x_1^2 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^1 \cdot x_3^1 + 5 \cdot x_1^1 - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (4.423 \cdot 8.135 + 5 \cdot 8.631 - 1)} = 6.251 ,$$

$$x_2^2 = \sqrt{2 \cdot x_1^2 + \ln x_3^1} = \sqrt{2 \cdot 6.251 + \ln 8.135} = 3.821 ,$$

$$x_3^2 = \sqrt{x_1^2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_3^1 + 8} = \sqrt{6.251 \cdot 3.821 + 2 \cdot 8.135 + 8} = 6.939 .$$

Se determină erorile:

$$|x_1^2 - x_1^1| = |6.251 - 8.631| = 2.38 > \varepsilon_x ,$$

$$|x_2^2 - x_2^1| = |3.821 - 4.423| = 0.602 > \varepsilon_x ,$$

$$|x_3^2 - x_3^1| = |6.939 - 8.135| = 1.196 > \varepsilon_x .$$

$$|f_1(\underline{x}^2)| = 21.4 > \varepsilon_f ,$$

$$|f_2(\underline{x}^2)| = 0.16 > \varepsilon_x ,$$

$$|f_3(\underline{x}^2)| = 2.39 > \varepsilon_x .$$

Erorile au scăzut, dar nu sunt încă îndeplinite condițiile de terminare a procesului de calcul  $\Rightarrow$  etapele II) și III) ale algoritmului se repetă pentru  $k = 3, 4, \dots, 12$ .

*Iterația  $k = 13$ :*

II) Se calculează  $\underline{x}^{13}$ :

$$x_1^{13} = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^{12} \cdot x_3^{12} + 5 \cdot x_1^{12} - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (3.292 \cdot 5.89 + 5 \cdot 4.531 - 1)} = 4.53 ,$$

$$x_2^{13} = \sqrt{2 \cdot x_1^{13} + \ln x_3^{12}} = \sqrt{2 \cdot 4.53 + \ln 5.89} = 3.291 ,$$

$$x_3^{13} = \sqrt{x_1^{13} \cdot x_2^{13} + 2 \cdot x_3^{12} + 8} = \sqrt{4.53 \cdot 3.291 + 2 \cdot 5.89 + 8} = 5.89 .$$

Se determină erorile:

$$|x_1^{13} - x_1^{12}| = |4.53 - 4.531| = 0.001 \leq \varepsilon_x,$$

$$|x_2^{13} - x_2^{12}| = |3.291 - 3.292| = 0.001 \leq \varepsilon_x,$$

$$|x_3^{13} - x_3^{12}| = |5.89 - 5.89| = 0 \leq \varepsilon_x.$$

$$|f_1(\underline{x}^2)| = 0.008 \leq \varepsilon_f,$$

$$|f_2(\underline{x}^2)| = 0.003 \leq \varepsilon_f,$$

$$|f_3(\underline{x}^2)| = 0.004 \leq \varepsilon_f.$$

Erorile calculate sunt mai mici sau cel mult egale cu erorile maxim admisibile  $\Rightarrow$  algoritmul se oprește.

$$\Rightarrow \text{soluția aproximativă: } \underline{x} = \begin{bmatrix} 4.43 \\ 3.291 \\ 5.89 \end{bmatrix}.$$

#### 4. Metode de tip Newton

Versiunea clasică a *metodei lui Newton* utilizează explicit derivatele parțiale de ordinul I ale funcțiilor  $f_i(\underline{x})$ ,  $i = 1 \dots n$ .

Se presupune că s-a ajuns la pasul  $k$  al procesului iterativ de calcul, ultima valoare aproximativă a soluției fiind  $\underline{x}^{k-1}$ . Se dorește determinarea unei corecții  $\underline{h}^{k-1}$  care, adăugată la  $\underline{x}^{k-1}$ , să conducă la soluția exactă  $\underline{c}$ :



unde toate derivatele sunt calculate în  $\underline{x}^{k-1}$ .

**Matricea Jacobian:**

$$\underline{J}^{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$\Rightarrow$  sistemul (4.3) se poate rescrie sub formă restrânsă:

$$\underline{J}^{k-1} \cdot \underline{h}^{k-1} = -\underline{f}^{k-1}. \quad (4.5)$$

#### Algoritmul versiunii clasice a metodei lui Newton:

I) Se inițializează  $\underline{x}$  cu  $\underline{x}^0 \in D$  (indicele superior – iterația curentă).

II) La un pas oarecare  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , al procesului iterativ de calcul, se calculează elementele vectorului  $\underline{f}^{k-1}$  și matricea  $\underline{J}^{k-1}$  pentru  $\underline{x} = \underline{x}^{k-1}$ .

III) La același pas se rezolvă sistemul (4.5)  $\Rightarrow$  noile valori ale variabilelor:

$$\underline{x}^k = \underline{x}^{k-1} + \underline{h}^{k-1}. \quad (4.6)$$

Calculul este terminat când sunt îndeplinite condițiile (4.7) și / sau (4.8):

$$|h_i^{k-1}| \leq \varepsilon_x, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.7)$$

$$|f_i(\underline{x}^k)| \leq \varepsilon_f, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

**Exemplu:** Să se rezolve sistemul de ecuații din exemplul anterior utilizând metoda clasică a lui Newton, cu erorile maxim admise  $\varepsilon_x = 0,01$  și  $\varepsilon_f = 0,1$ , cunoscând că s-a separat o soluție în domeniul  $D = [0; 10] \times [0; 10] \times [1; 10]$ .

*Soluție:* Se parcurg etapele algoritmului:

I) Se face inițializarea:  $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ .

*Iterația  $k = 1$ :*

II) Se calculează elementele vectorului  $\underline{f}^0 = \underline{f}(\underline{x}^0)$ :

$$\underline{f}^0 = \begin{bmatrix} 2(x_1^0)^2 - x_2^0 x_3^0 - 5x_1^0 + 1 \\ (x_2^0)^2 - 2x_1^0 - \ln x_3^0 \\ (x_3^0)^2 - x_1^0 x_2^0 - 2x_3^0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 77.697 \\ -28 \end{bmatrix}$$

și elementele matricei Jacobian:

$$\underline{J}^0 = \begin{bmatrix} 4x_1^0 - 5 & -x_3^0 & -x_2^0 \\ -2 & 2x_2^0 & -\frac{1}{x_3^0} \\ -x_2^0 & -x_1^0 & 2x_3^0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & -10 & -10 \\ -2 & 20 & -0.1 \\ -10 & -10 & 18 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \text{sistemul (4.5) devine: } \begin{cases} 35h_1^0 - 10h_2^0 - 10h_3^0 = -51 \\ -2h_1^0 + 20h_2^0 - 0,1h_3^0 = -77.697 \\ -10h_1^0 - 10h_2^0 + 18h_3^0 = 28 \end{cases} .$$

$$\text{III) Se rezolvă sistemul } \Rightarrow \underline{h}^0 = \begin{bmatrix} -3.445 \\ -4.243 \\ -2.716 \end{bmatrix} .$$

$$\Rightarrow \text{noile valori ale lui } \underline{x}: \underline{x}^1 = \underline{x}^0 + \underline{h}^0 = \begin{bmatrix} 6.555 \\ 5.757 \\ 7.284 \end{bmatrix} .$$

Însă  $|\underline{h}_1^0| = |3.445| > \varepsilon_x \Rightarrow$  nu sunt îndeplinite condițiile de terminare a calculelor  $\Rightarrow$  algoritmul se continuă cu iterația următoare:

*Iterația  $k = 2$ :*

II) Se calculează elementele vectorului  $\underline{f}^1 = \underline{f}(\underline{x}^1)$  și ale matricei Jacobian:

$$\underline{f}^1 = \begin{bmatrix} 2(x_1^1)^2 - x_2^1 x_3^1 - 5x_1^1 + 1 \\ (x_2^1)^2 - 2x_1^1 - \ln x_3^1 \\ (x_3^1)^2 - x_1^1 x_2^1 - 2x_3^1 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.227 \\ 18.047 \\ -7.248 \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^1 = \begin{bmatrix} 4x_1^1 - 5 & -x_3^1 & -x_2^1 \\ -2 & 2x_2^1 & -\frac{1}{x_3^1} \\ -x_2^1 & -x_1^1 & 2x_3^1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.22 & -7.284 & -5.757 \\ -2 & 11.514 & -0.137 \\ -5.757 & -6.555 & 12.568 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$  sistemul (4.5):

$$\begin{cases} 21.22h_1^1 - 7.284h_2^1 - 5.757h_3^1 = -12.227 \\ -2h_1^1 + 11.514h_2^1 - 0.137h_3^1 = -18.047 \\ -5.757h_1^1 - 6.555h_2^1 + 12.568h_3^1 = 7.248 \end{cases}.$$

III) Rezolvarea sistemului  $\Rightarrow \underline{h}^1 = \begin{bmatrix} -1.498 \\ -1.84 \\ -1.069 \end{bmatrix}$ .

$\Rightarrow$  noile valori ale lui  $\underline{x}$ :  $\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + \underline{h}^1 = \begin{bmatrix} 5.057 \\ 3.917 \\ 6.215 \end{bmatrix}$ .

Însă, din nou  $|\underline{h}_1^1| = |1.498| > \varepsilon_x \Rightarrow$  calculele se continuă cu iterația următoare.

*Alte variante* ale metodei lui Newton: eliminarea calculului derivatei.