CALCULUL NUMERIC AL VALORILOR PROPRII ŞI AL VECTORILOR PROPRII

$\underline{A}$ – matrice pătratică de ordinul "n" cu elemente reale. $\lambda \in C$ – ***valoare proprie*** a matricei $\underline{A}$ dacă $\exists$ $\underline{x} \in R^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$:

$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$; (1)

$\underline{x}$ – ***vector propriu*** al matricei $\underline{A}$ asociat valorii λ.

(1) $\Leftrightarrow$ $(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{I}$ – matricea unitate de ordinul "n". (2)

Scriere sub formă dezvoltată a relației (2):

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

– sistem liniar şi omogen. (3)

Soluții nebanale $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ să aibă valori proprii şi vectori proprii $\Leftrightarrow$ determinantul sistemului să fie nul:

$$\det\left(\underline{A} - \lambda\underline{I}\right) = P_n(\lambda) = c_1\lambda^n + c_2\lambda^{n-1} + \ldots + c_n\lambda + c_{n+1} = 0 \,. \quad (4)$$

Ecuația (4) – ***ecuația caracteristică*** a matricei $\underline{A}$; funcția polinomială $P_n(\lambda)$ – ***polinomul caracteristic*** al matricei $\underline{A}$.

Observaţie: În (4) se cunoaşte valoarea coeficientului dominant, $c_1 = (-1)^n$. Altă formă practică a ecuaţiei caracteristice şi, corespunzător, a polinomului caracteristic – prin înmulţirea relaţiei (4) cu $(-1)^n \Rightarrow$

$$\det\left(\lambda \underline{I} - \underline{A}\right) = P_n^{'}(\lambda) = c_1^{'}\lambda^n + c_2^{'}\lambda^{n-1} + \ldots + c_n^{'}\lambda + c_{n+1}^{'} = 0, \quad (5)$$

în care $c_1^{'} = 1$.

Ansamblul valorilor proprii ale matricei $\underline{A}$ – ***spectrul*** matricei $\underline{A}$: $\sigma(\underline{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$; (6)

numărul:

$$\rho(\underline{A}) = \max_{\lambda_i \in \underline{A}} |\lambda_i| \quad (7)$$

se numeşte ***raza spectrală*** a lui $\underline{A}$.

$\underline{A}$ are "n" vectori proprii liniar independenţi – ***simplă*** sau ***nedefectivă***; în caz contrar – ***defectivă***. O matrice simplă are toate valorile proprii simple.

Două matrice pătratice de ordinul "n" $\underline{A}$ şi $\underline{B}$ sunt ***asemenea*** sau ***similare*** dacă există o a treia matrice pătratică de ordinul "n" nesingulară $\underline{S}$ astfel încât:

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1}\, \underline{A}\, \underline{S}. \quad (8)$$

Notaţie: $\underline{A} \sim \underline{B}$; (8) – ***transformare de similaritate***.

Teorema 1: Două matrice **asemenea** au **acelaşi polinom caracteristic**.

Demonstraţie: Fie A şi B astfel încât A ~ B ⇒

$$\det(\underline{B}-\lambda\underline{I}) \overset{(8)}{=} \det\left(\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}-\lambda\underline{S}^{-1}\underline{I}\underline{S}\right)=\det\left[\underline{S}^{-1}(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{S}\right]=$$
$$=\det\left(\underline{S}^{-1}\right)\cdot\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})\cdot\det(\underline{S})=\det\left(\underline{S}^{-1}\underline{S}\right)\cdot\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=$$
$$=\det(\underline{I})\cdot\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=\det(\underline{A}-\lambda\underline{I}) .$$

Consecinţă: Două matrice **asemenea** au **aceleaşi valori proprii**.

Teorema 2: Dacă $\underline{A}$ este **simplă** ⇒ este **asemenea cu matricea diagonală** $\underline{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$:

$$\underline{\Lambda} = \underline{S}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{S}\,, \tag{9}$$

unde $\underline{S}$ are pe coloane cei “n” vectori proprii:

$$\underline{S} = \left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n\right]. \tag{10}$$

Demonstraţie: $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, …, $\underline{x}_n$ sunt valori proprii ⇒

$$\left[\underline{A}\underline{x}_1 \quad \underline{A}\underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{A}\underline{x}_n\right]=\left[\lambda\underline{x}_1 \quad \lambda\underline{x}_2 \quad \ldots \quad \lambda\underline{x}_n\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{A}\left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n\right]=\left[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n\right]\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \ldots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \underline{A}\,\underline{S} = \underline{S}\,\underline{\Lambda}$.

Înmulţire la dreapta cu $\underline{S}^{-1} \Rightarrow$ (9).

Relaţia (9) foloseşte *calculului valorilor proprii când se cunosc vectorii proprii*.

Observaţie: Pentru o matrice (superior sau inferior) triunghiulară sau diagonală valorile proprii sunt chiar elementele diagonalei principale.

Teorema 3: Dacă $P_n(\lambda)$ – polinomul caracteristic (4) al matricei $\underline{A} \Rightarrow$ ***identitatea lui Cayley-Hamilton***:

$$P_n(\lambda) = c_1\underline{A}^n + c_2\underline{A}^{n-1} + \ldots + c_n\underline{A} + c_{n+1}\underline{I} = \underline{0} \ , \tag{11}$$

adică polinomul caracteristic al unei matrice este polinomul anulant al ei.

Metodele de determinare a valorilor proprii se categorisesc:

- după numărul valorilor proprii determinate:

- metode *globale* – determină toate cele "n" valori proprii şi toţi cei "n" vectori proprii,
- metode *parţiale* – determină numai anumite valori proprii şi vectorii proprii aferenţi;

- după natura algoritmului de calcul:

- metode *directe* – determină explicit polinomul caracteristic şi calculează valorile proprii prin rezolvarea ecuației caracteristice (4),
- metode *indirecte* sau *iterative* – evită rezolvarea ecuației caracteristice (4) determinând valorile proprii prin procedee de aproximații succesive bazate pe transformări de similaritate.

1. Metode globale directe

Determină toate valorile proprii ale matricei $\underline{A}$ prin **obținerea explicită a ecuației caracteristice (4)**, care poate fi rezolvată apoi cu unul din algoritmii din capitolul următor. După determinarea valorii proprii λ_i se parcurg ***etapele pentru determinarea vectorului propriu*** $\underline{x}_i$:

(a) Se înlocuieşte λ_i în sistemul (3) – liniar şi omogen, de ordinul "n", cu matricea coeficienților singulară.

(b) Se fixează arbitrar valoarea unei variabile (de regulă, x_1=1).

(c) Se înlocuieşte valoarea fixată în sistemul de la (a) şi se renunță la ecuația corespunzătoare valorii proprii respective, λ_i.

(d) Se rezolvă sistemul liniar de ordinul "n–1" de la punctul (c) aplicând una din metodele din capitolul anterior.

Metodă globală – ***metoda Leverrier***, bazată pe noțiunea de **urmă a unei matrice** $\underline{B} = \lfloor b_{ij} \rfloor_{i,\, j\, =\, \overline{1,n}}$ definită:

$$tr(\underline{B}) = \sum_{i\,=\,1}^{n} b_{ii} \ , \tag{1.1}$$

Algoritmul metodei Leverrier – **etape**:

(I) Determinarea coeficienților c_i, $i = \overline{1, n+1}$ ai polinomului caracteristic (4). Se parcurg etapele 1)…3):

1) Se fixează pentru primul coeficient valoarea $c_1 = 1$.

2) Se inițializează matricea ajutătoare $\underline{B}$ sub forma:

$$\underline{B}^1 = \lfloor b^1{}_{ij} \rfloor_{i,\, j\, =\, \overline{1,n}} = \underline{A} \tag{1.2}$$

(indicele superior – pasul curent de calcul) şi se determină valoarea coeficientului c_2:

$$c_2 = -\sum_{i\,=\,1}^{n} b^1{}_{ii} \ . \tag{1.3}$$

3) La un pas oarecare $k = \overline{2, n}$ se determină valoarea curentă a matricei $\underline{B}$:

$$\underline{B}^k = \underline{A}\left(\underline{B}^{k-1} + c_k \underline{I}\right) \tag{1.4}$$

şi apoi se calculează valoarea coeficientului c_{k+1}:

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} b^k{}_{ii} \quad . \tag{1.5}$$

(II) Calculul valorilor proprii prin rezolvarea ecuației caracteristice (4).

(III) Determinarea vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii de la etapa II) prin parcurgerea etapelor (a) … (d) specificate anterior.

Exemplu: Să se calculeze cu metoda Leverrier valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricea $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluție: Se parcurg etapele (I) … (III) ale algoritmului:

(I) 1) $c_1 = 1$.

2) $\underline{B}^1 = \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$c_2 = -(1+5+1) = -7$.

3) Pasul **k=2**. Se aplică (1.4) şi (1.5) $\Rightarrow$

$$\underline{B}^2 = \underline{A}\left(\underline{B}^1 + c_2\underline{I}\right) = \underline{A}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -14 \\ 2 & -8 & 2 \\ -14 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}(4 - 8 + 4) = 0.$$

Pasul **k=3**. Se aplică din nou (1.4) şi (1.5) $\Rightarrow$

$$\underline{B}^3 = \underline{A}\left(\underline{B}^2 + c_3\underline{I}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -14 \\ 2 & -8 & 2 \\ -14 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{bmatrix}.$$

$$c_4 = -\frac{1}{3}(-36 - 36 - 36) = 36.$$

(II) S-a obţinut ecuaţia caracteristică:

$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$, cu soluţiile: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

(III) Sistemul (3) are expresia: $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$.

Se calculează vectorul propriu $\underline{x}_1$ corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -2$. Se fixează $x_1 = 1$, se renunţă la prima ecuaţie şi se fac înlocuirile în celelalte $\Rightarrow \begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$.

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = 1, x_3 = 0$ $\Rightarrow$ primul vector propriu:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Urmează $\underline{x}_2$. Se fixează $x_1 = 1$, se renunță la a doua ecuație din sistem, se fac înlocuirile în celelalte $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}.$$

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = -1, x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

În final, se calculează vectorul propriu $\underline{x}_3$ corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$. Se fixează $x_1 = 1$, se renunță la a treia ecuație și se fac înlocuirile în primele două $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = 2, x_3 = 1$ $\Rightarrow$ al treilea vector propriu, $\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Metode de localizare a valorilor proprii. Aplicații la analiza stabilității sistemelor dinamice liniare

Se consideră o matrice pătratică reală $\underline{A}$ de ordinul "n". Se pune problema *localizării tuturor celor "n" valori proprii ale acestei matrice fără a le calcula în mod distinct*.

Aplicație: analiza stabilitații sistemelor dinamice liniare la care $\underline{A}$ este matricea sistemului $\Rightarrow$ suficientă determinarea unor domenii ale planului complex unde se găsesc cu siguranță toate valorile proprii ale matricei $\underline{A}$.

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin

Două tipuri de discuri:

$$L_i = \left\{ \lambda \in C \,\middle|\, \left| \lambda - a_{ii} \right| \le l_i \right\}, i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

$$l_i = \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} \left| a_{ij} \right| \tag{2.2}$$

(interiorul cercului cu centrul în elementul diagonal a_{ii} şi de rază l_i);

$$C_j = \left\{ \lambda \in C \,\middle|\, \left| \lambda - a_{jj} \right| \le r_j \right\}, j = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

$$r_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left| a_{ij} \right| \tag{2.4}$$

Fiecare valoare proprie a matricii $\underline{A}$ se află în cel puțin unul din discurile L_i şi în cel puțin unul din discurile C_j.

Notații: $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, $C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$, (2.5)

$\Rightarrow$ rezultatul esențial: $\sigma(\underline{A}) \subseteq L \cap C$; (2.6)

egalitatea are loc numai pentru matrice diagonale (pentru care razele discurilor sunt nule) !

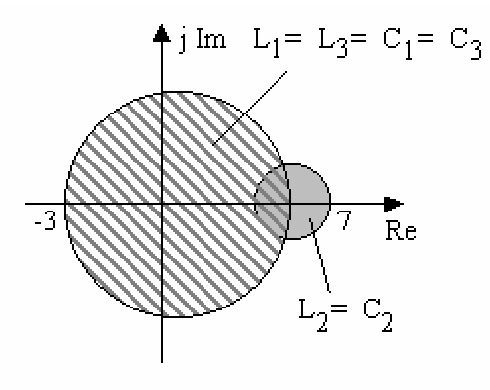
Exemplu: Utilizând metoda discurilor lui Gerschgorin, să se determine un domeniu al planului complex în care se află valorile proprii ale matricei din exemplul anterior:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

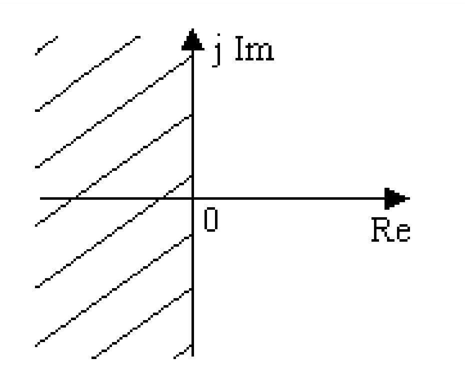
Soluție: Discurile au următoarele expresii conform relațiilor (2.1) … (2.4):

$$L_1 = \{\lambda \in C \| \lambda - 1| \le 1 + 3 = 4\},$$
$$L_2 = \{\lambda \in C \| \lambda - 5| \le 1 + 1 = 2\},$$
$$L_3 = \{\lambda \in C \| \lambda - 1| \le 3 + 1 = 4\} = L_1 \ ,$$
$$C_1 = \{\lambda \in C \| \lambda - 1| \le 1 + 3 = 4\} = L_1 \ ,$$
$$C_2 = \{\lambda \in C \| \lambda - 5| \le 1 + 1 = 2\} = L_2 \ ,$$
$$C_3 = \{\lambda \in C \| \lambda - 1| \le 3 + 1 = 4\} = L_3 \ .$$

Domeniul cerut se află în interiorul zonelor haşurate:



Aplicație a metodelor de localizare: ***metodele de analiză a stabilității sistemelor dinamice liniare cu timp continuu*** la care matricea sistemului este $\underline{A}$. Oferă condiții necesare şi suficiente pentru ca **toate valorile proprii** ale lui $\underline{A}$ **să fie situate strict în semiplanul complex stâng** (să aibă partea reală strici negativă) – zona haşurată:



Criteriul de stabilitate Routh

Se începe cu calculul polinomului caracteristic al matricei $\underline{A}$:

$$\mu(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda^1 + a_0 \qquad (2.7)$$

(necesar ca $a_n > 0$ – *esențial* !).

Construirea schemei Routh, cu, "n+1" linii și $\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ coloane. Primele două linii se completează cu coeficienții lui $\mu(\lambda)$, iar restul schemei pe baza formulelor:

$$b_i = \frac{r_{i-1,1}}{r_{i,1}}, \quad i = \overline{2, n+1}, \qquad (2.8)$$

$$r_{i+1,j} = r_{i-1,j+1} - b_i r_{i,j+1}, \quad i = \overline{2,n}; \text{ j} = 1, 2, \ldots . \qquad (2.9)$$

Coeficienții de pe coloana 1 – esențiali – **coeficienți Routh**. Schema Routh:

	(0)	(1)	(2)	…	(j)	(j+1)	…	$\left[\frac{n+2}{2}\right]$
(1)	–	$r_{11}= a_n$	$r_{12}= a_{n-2}$	…	$r_{1,j}$	$r_{1,j+1}$	…	a_0 sau 0
(2)	b_2	$r_{21}= a_{n-1}$	$r_{22}= a_{n-3}$	…	$r_{2,j}$	$r_{2,j+1}$	…	0 sau a_0
(3)	b_3	r_{31}	r_{32}	…	$r_{3,j}$	$r_{3,j+1}$	…	
…	…	…	…	…	+	…	…	
(i–1)	b_{i-1}	$r_{i-1,1}$	$r_{i-1,2}$	…	$r_{i-1,j}$	$\boxed{r_{i-1,j+1}}$	…	
(i)	$\boxed{b_i}$	$r_{i,1}$	$r_{i,2}$	…	$r_{i,j}$	$\boxed{r_{i,j+1}}$	…	
(i+1)	b_{i+1}	$r_{i+1,1}$	$r_{i+1,2}$	…	$\boxed{r_{i+1,j}}$	$r_{i+1,j+1}$	…	
		…						
(n)	b_n	$r_{n,1}$	$r_{n,2}$(= 0)					
(n+1)	b_{n+1}	$r_{n+1,1}$						

Enunțul criteriului Routh: sistemul dinamic liniar cu timp continuu cu matricea sistemului $\underline{A}$ este **stabil** (toate valorile proprii au partea reală strict negativă) dacă şi numai dacă **toți coeficienții Routh sunt strict pozitivi**.

Avantaje: 1. Pentru valori mari ale lui “n”.

2. Dacă elementele matricei $\underline{A}$ depind de anumiți parametri, se pot determina condiții pe care trebuie să le satisfacă aceşti parametri pentru ca sistemul să fie stabil.

Exemplu: Să se determine condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametrul “a” pentru ca matricea: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

să aibă toate valorile proprii cu părțile reale strict negative.

Soluție: Particularizare în cazul n = 3. Polinomul caracteristic al matricei $\underline{A}$:

$$\mu(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 3 \\ -a+1 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a-1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) + 2(\lambda + 2 + 3a - 3) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 6a - 2 .$$

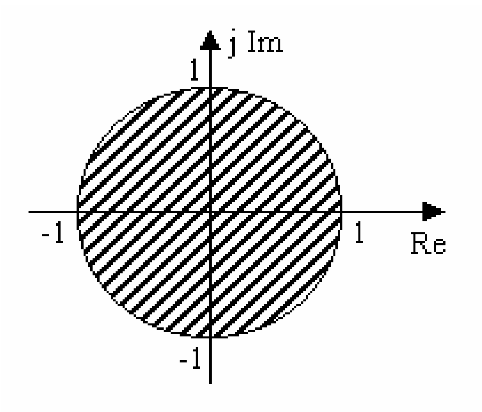
$\Rightarrow$ coeficienții: $a_3=1$, $a_2=1$, $a_1=3$, $a_0=6a–2$.

Schema Routh:

	(0)	(1)	(2)
(1)	___	$r_{11} = 1$	3
(2)	$b_2 = \frac{1}{1} = 1$	$r_{21} = 1$	6a–2
(3)	$b_3 = \frac{1}{5-6a}$	$r_{31} = 3 - 1(6a-2) = 5 - 6a$	0
(4)		$r_{41} = 6a - 2 - \frac{1}{5-6a} \cdot 0 = 6$	

$\Rightarrow$ condiţiile: $\begin{cases} r_{31} > 0 \\ r_{41} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 6a > 0 \\ 6a - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right)$

Aplicaţie a metodelor de localizare: ***metodele de analiză a stabilităţii sistemelor dinamice liniare cu timp discret*** la care matricea sistemului este $\underline{A}$. Oferă condiţiile şi suficiente pentru ca **toate valorile proprii** ale lui $\underline{A}$ **să fie situate strict în interiorul discului centrat în origine şi de rază unitate** (să aibă modulul subunitar) – zona haşurată:



Variantă: se defineşte matricea transformată $\underline{B}$:

$$\underline{B} = \underline{I} + 2(\underline{A} - \underline{I})^{-1} \quad . \tag{2.10}$$

Criteriul de stabilitate bazat pe şirul puterilor matricei $\underline{B}$: sistemul dinamic liniar cu timp discret cu matricea sistemului $\underline{A}$ este stabil (are toate valorile proprii de modul subunitar) $\Leftrightarrow$ $\underline{B}^k \to \underline{0}$ pentru $k \to \infty$. (2.11)

Practic: ridicarea matricei $\underline{B}$ la putere astfel încât fiecare matrice să fie pătratul celei precedente:

$$\underline{B}^k = \left[b^{(k)}{}_{ij} \right]_{i,j=\overline{1,n}} = \underline{B}^{2^m} = \underline{B}^{2^{m-1}} \cdot \underline{B}^{2^{m-1}} = \dots \, . \tag{2.12}$$

Pentru ca sistemul să fie stabil este **suficient** să existe $k \in N^*$ astfel încât:

$$| b^{(k)}{}_{ij} | \leq \frac{1}{n}, \quad i,j = \overline{1,n} \, . \tag{2.13}$$

$\Rightarrow$ calculele se întrerup atunci când este satisfăcută (2.13).

Exemplu: Să se verifice dacă matricea: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.8 & 3.2 \\ -0.4 & -2.5 \end{bmatrix}$ are toate valorile proprii de modul subunitar.

Soluție: Particularizare (2.10), (2.12) şi (2.13) pentru n=2

$$\Rightarrow \underline{A} - \underline{I} = \begin{bmatrix} -1.8 & 3.2 \\ -0.4 & -3.5 \end{bmatrix}; \quad \left(\underline{A} - \underline{I}\right)^T = \begin{bmatrix} -1.8 & -0.4 \\ 3.2 & -3.5 \end{bmatrix};$$

$$\det\left(\underline{A} - \underline{I}\right) = 6.3 + 1.28 = 7.58 \;; \quad \left(\underline{A} - \underline{I}\right)^+ = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.2 \\ 0.4 & -1.8 \end{bmatrix};$$

$$\left(\underline{A} - \underline{I}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\underline{A} - \underline{I}\right)} \cdot \left(\underline{A} - \underline{I}\right)^+ = \begin{bmatrix} -0.462 & -0.422 \\ 0.053 & -0.238 \end{bmatrix};$$

$$\underline{B} = \underline{I} + 2\left(\underline{A} - \underline{I}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.924 & -0.844 \\ 0.106 & -0.476 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix}.$$

Nu este verificată (2.13) $\Rightarrow$ este nevoie de calculul lui $\underline{B}^2$:

$$\underline{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix}.$$

Nu este verificată (2.13) $\Rightarrow$ va fi calculată $\underline{B}^4$:

$$\underline{B}^4 = \underline{B}^2 \cdot \underline{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.052 \\ 0.007 & -0.003 \end{bmatrix}.$$

(2.13) este verificată $\Rightarrow$ toate valorile proprii au modulul subunitar.

3. Metode parţiale iterative

Utilizate în situaţiile în care nu se cer toate valorile proprii ale unei matrice ci numai unele dintre acestea şi nici nu se determină polinomul caracteristic.

Valoare proprie dominantă (principală) a unei matrice – cea care are modulul maxim. Pentru **calculul valorii proprii dominante, al vectorului propriu asociat acesteia şi al razei spectrale:** variantă a ***metodei puterii directe (a lui Rayleigh)*** sau ***metodei puterii*** sau ***metodei iterative directe***.

Fie vectorul $\underline{u}^0$ – *o primă iteraţie* a soluţiei reprezentând vectorul propriu corespunzător valorii proprii dominante. $\underline{u}^0$ este o combinaţie liniară necunoscută (de coeficienţi α_i) a vectorilor proprii $\underline{x}_i$ *presupuşi liniar independenţi* ai matricei $\underline{A}$:

$$\underline{u}^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \underline{x}_i \, . \tag{3.1}$$

Următoarele iterații se calculează pe baza relației:

$$\underline{u}^1 = \underline{A}\,\underline{u}^0 \,,\ \underline{u}^2 = \underline{A}\,\underline{u}^1 \,, \ldots ,\ \underline{u}^k = \underline{A}\,\underline{u}^{k-1} \,, \ldots . \tag{3.2}$$

Prin substituții repetate din (3.2) în (3.1) şi ținând seama de:

$$\underline{A}\,\underline{x}_i = \lambda_i \, \underline{x}_i \,,\ i = 1 \ldots n \,, \tag{3.3}$$

$\Rightarrow$ expresia vectorului propriu corespunzător valorii proprii dominante la iterația k:

$$\underline{u}^k = \lambda_1^{\,k} \left[\alpha_1 \, \underline{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \, (\lambda_i/\lambda_1)^k \, \underline{x}_i \right] . \tag{3.4}$$

Presupunere: valorile proprii ale matricei $\underline{A}$ sunt ordonate astfel încât să verifice (eventual, o permutare):

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| \,, \tag{3.5}$$

$\Rightarrow$ pentru un număr suficient de iterații (pentru un k suficient de mare) *raportul* $(\lambda_i/\lambda_1)^k$ *va converge către zero* $\Rightarrow$ suma din (3.4) va converge către zero $\Rightarrow$

$$\underline{u}^k \to \lambda_1^{\,k} \, \alpha_1 \, \underline{x}_1 = p^k \, \underline{x}_1 \,,\quad \text{cu} \quad p^k = \lambda_1^{\,k} \, \alpha_1 \, . \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow \underline{u}^k \text{ proporțional cu } \underline{x}_1 \text{ şi } \ (p^k/p^{k-1}) \to \lambda_1 \, . \tag{3.7}$$

$\Rightarrow$ raza spectrală: $\rho(\underline{A}) = |\lambda_1|$. (3.8)

Implementare: după fiecare iterație se execută *normarea* vectorului $\underline{u}^k$ prin împărțire cu elementul de modul maxim $\Rightarrow$

$\underline{v}^k = \underline{A}\,\underline{u}^k$, $\underline{u}^{k+1} = [1/\max(\underline{v}^k)]\cdot\underline{v}^k$, k = 0, 1, 2, … , (3.9)

cu $\max(\underline{v}^k)$ – elementul de modul maxim al vectorului $\underline{v}^k$.

Algoritmul – parcurgerea repetată a relațiilor (3.9) până la atingerea convergenței, adică până când este satisfăcută condiția de terminare a procesului iterativ de calcul:

$$\max_j \{|u_j^{k+1} - u_j^k|\} \le \varepsilon\,,\ j = 1 \dots n\,, \qquad (3.10)$$

cu eroarea $\varepsilon > 0$ prestabilită.

Odată satisfăcută (3.10), $\max(\underline{v}^k)$ va fi valoarea proprie dominantă / principală iar modulul său va fi raza spectrală.

Algoritmul metodei puterii directe – **etape**:

1) Se inițializează $\underline{x}_1$ cu $\underline{u}^0$ (arbitrar ales):

$\underline{x}_1 = \underline{u}^k$, (3.11)

(indicele superior – numărul iterației curente).

2) La un pas oarecare k al procesului iterativ de calcul, k = 0, 1, 2, … , se determină valoarea curentă a vectorului $\underline{v}^k$ şi noua valoare a vectorului $\underline{x}_1$, $\underline{u}^{k+1}$, aplicând (3.9).

3) Calculul este considerat terminat atunci când se stabilizează vectorul propriu $\underline{x}_1$, adică este verificată condiția (3.10) de terminare a procesului iterativ de calcul.

4) Valoarea proprie principală se determină ca egală cu ultimul factor de normare:

$$\lambda_1 = \max(\underline{v}^k) , \tag{3.12}$$

vectorul propriu corespunzător este ultimul vector $\underline{u}^{k+1}$:

$$\underline{x}_1 = \underline{u}^{k+1} , \tag{3.13}$$

iar raza spectrală se obține aplicând formula (3.8):

$$\rho(\underline{A}) = | \lambda_1 | . \tag{3.8}$$

Remarcă: Viteza de convergență a algoritmului este cu atât mai mare cu cât rapoartele λ_i/λ_1, i = 2 … n sunt mai mici. Algoritmul este eficient în cazul matricelor nesimetrice.