TRANSFORMAREA *Z*
(TRANSFORMAREA LAPLACE DISCRETĂ)

1. Şiruri original

Definiția 1: Un şir $(f_n)_{n\in N}$, $f_n \in C$, se numeşte ***şir orginal*** dacă verifică proprietatea:

$\exists$ c > 0 şi a $\geq$ 0 astfel încât $|f_n| \leq ca^n, \forall n \in N$.

Numărul a = ***indice de creştere***.

Notație: O' = ***mulțimea şirurilor original***; O' $\subset$ F, unde F = spațiul liniar complex al funcțiilor complexe de variabilă reală. Este evident că funcția $(f_n)_{n\in N}$ din definiție satisface relația: $(f_n)_{n\in N} \in$ O'.

Exemplu de şir original $(\sigma_n)_{n\in N}$, $\sigma_n = 1$, $\forall$ n $\in$ *N*, se numeşte şir original unitate sau **funcție treaptă unitate discretă**, $(\sigma_n)_{n\in N} \in$ O'.

Proprietăți ale şirurilor original:

Proprietatea 1 (fără demonstrație):

Dacă $(f_n)_{n\in N} \in$ F $\Rightarrow$ $(g_n)_{n\in N} \in$ O', cu $g_n = f_n \cdot \sigma_n$.

Remarcă: În cele ce urmează **se notează cu acelaşi simbol** un şir şi şirul obținut din acesta prin înmulțire cu funcția treaptă unitate discretă → toate şirurile considerate în cadrul acestui capitol vor fi şiruri original.

Proprietatea 2: Fie $(f_n)_{n\in N}$, $(g_n)_{n\in N} \in$ O' şi $\lambda \in C$ →

1) $(f_n + g_n)_{n\in N} \in$ O';

2) $(f_n \cdot g_n)_{n\in N} \in$ O';

3) $(\lambda \cdot f_n)_{n\in N} \in$ O'.

Demonstrație: Fie $(f_n)_{n\in N} \in$ O'; din definiție → ∃ $c_1 > 0$ şi $a_1 \geq 0$ astfel încât $|f_n| \leq c_1 {a_1}^n, \forall n \in N$. Fie $(g_n)_{n\in N} \in$ O'; din definiție → ∃ $c_2 > 0$ şi $a_2 \geq 0$ astfel încât $|g_n| \leq c_2 {a_2}^n, \forall n \in N$.

Se aplică proprietățile modulului ținând seama de inegalitățile de mai sus →

1) $|f_n + g_n| \leq |f_n| + |g_n| \leq c_1 a_1^n + c_2 a_2^n \leq [\max(c_1, c_2)](a_1^n + a_2^n) \leq ca^n, \forall n \in N$,

unde: $c=2\max(c_1,c_2) > 0$, $a=\max(a_1,a_2) \geq 0 \Rightarrow (f_n+g_n)_{n\in N} \in$ O'.

2) $|f_n \cdot g_n| = |f_n| \cdot |g_n| \leq c_1 a_1^n \cdot c_2 a_2^n = [(c_1, c_2)](a_1 a_2)^n = ca^n, \forall n \in N$,

unde: $c = (c_1 c_2) > 0$, $a = (a_1 a_2) \geq 0 \Rightarrow (f_n \cdot g_n)_{n\in N} \in$ O'.

3) $|\lambda f_n| = |\lambda| \cdot |f_n| \leq |\lambda| c_1 {a_1}^n = ca^n, \forall n \in N$,

unde: $c = |\lambda| c_1 > 0$, $a = a_1 \geq 0 \Rightarrow (\lambda \cdot f_n)_{n\in N} \in$ O'.

Definiția 2: Fie $(f_n)_{n\in N}$, $(g_n)_{n\in N} \in$ O'. Se numeşte ***produsul de convoluție*** al şirurilor $(f_n)_{n\in N}$ şi $(g_n)_{n\in N}$ şirul $(h_n)_{n\in N} \in$ F, cu termenul general: $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$, $\forall n \in N$.

Notație: $(h_n)_{n\in N} = (f_n)_{n\in N} * (g_n)_{n\in N}$.

Proprietatea 3

(proprietăţi ale produsului de convoluţie):

(a) Produsul de convoluţie a două şiruri original este **şir original**, adică:

$\forall\ (f_n)_{n\in N}, (g_n)_{n\in N} \in O' \ \Rightarrow\ (h_n)_{n\in N} = (f_n)_{n\in N} * (g_n)_{n\in N} \in O'$;

(b) Produsul de convoluţie este **comutativ**, adică:

$\forall\ (f_n)_{n\in N}, (g_n)_{n\in N} \in O' \ \Rightarrow\ (f_n)_{n\in N} * (g_n)_{n\in N} = (g_n)_{n\in N} * (f_n)_{n\in N}$;

(c) Produsul de convoluţie este **distibutiv faţă de adunare**, adică: $\forall\ (f_n)_{n\in N}, (g_n)_{n\in N} \in O' \ \Rightarrow$

$(f_n)_{n\in N} * ((g_n)_{n\in N}+(h_n)_{n\in N}) = (f_n)_{n\in N}*(g_n)_{n\in N} + (f_n)_{n\in N}*(h_n)_{n\in N}$,

$((f_n)_{n\in N}+(g_n)_{n\in N}) * (h_n)_{n\in N} = (f_n)_{n\in N}*(h_n)_{n\in N} + (g_n)_{n\in N}*(h_n)_{n\in N}$.

Demonstraţie (pentru (a) şi (b)).

(a) Fie $(f_n)_{n\in N} \in O'$; din definiţia 1 $\rightarrow \exists\ c_1 > 0$ şi $a_1 \geq 0$ astfel încât $|f_n| \leq c_1 {a_1}^n, \forall n \in N$. Fie $(g_n)_{n\in N} \in O'$; din definiţia 1 $\rightarrow \exists$ $c_2 > 0$ şi $a_2 \geq 0$ astfel încât $|g_n| \leq c_2 {a_2}^n, \forall n \in N$. Se presupune, pentru simplitate şi fără a reduce din generalitatea proprietăţii, că $a_1 > a_2$.

Se aplică definiţia 2, proprietăţile modului şi sumei, calculând suma termenilor unei progresii geometrice

$\rightarrow$

$$|h_n| = |f_n * g_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} |f_k|\cdot|g_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} c_1 \cdot a_1^k \cdot c_2 a_2^{n-k} =$$

$$= c_1 c_2 a_2^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k = c_1 c_2 a_2^n \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a_1}{a_2} - 1} \le c_1 c_2 a_2^n \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n+1}}{\frac{a_1 - a_2}{a_2}} = ca^n, \forall n \in N$$

unde: c = $\frac{c_1 c_2}{a_1 - a_2} a_1 > 0$, a = $a_1 \ge 0$ $\rightarrow$ $(h_n)_{n\in N} \in$ O'.

(b) Fie $(f_n)_{n\in N}$, $(g_n)_{n\in N} \in$ O'.

Se aplică din nou 2 şi schimbarea de variabilă n – k = l.

$$\rightarrow \quad f_n * g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} = \sum_{l=n}^{0} f_{n-l}\cdot g_l = \sum_{l=0}^{n} g_l f_{n-l} = g_n * f_n,\ \forall n \in N.$$

$\rightarrow (f_n)_{n\in N} * (g_n)_{n\in N} = (g_n)_{n\in N} * (f_n)_{n\in N}$.

2. Definiția şi proprietățile transformării Z

Definiția 3: Fie $(f_n)_{n\in N} \in$ O' $\rightarrow$ $\exists$ c > 0 şi a $\ge$ 0 astfel încât $|f_n| \le ca^n, \forall n \in N$. Fie D_0' = $\{z \in C \mid |z| > a\} \subset C$. Se numeşte **transformata Z** a şirului $(f_n)_{n\in N}$ sau **funcția imagine** sau **transformata Laplace discretă**, funcția complexă de variabilă complexă F: $D_0' \subset C \rightarrow C$, F $\in$ C (cu C – spațiul liniar al funcțiilor complexe de variabilă complexă), definită prin:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \;,\; z \in C. \tag{2.1}$$

Aplicația Z: O' → C, definită prin:

$$Z((f_n)_{n\in N}) = F(z) \;,\; \forall\, (f_n)_{n\in N} \in \text{O'}, \tag{2.2}$$

se numeşte ***transformarea Z*** sau ***transformarea Laplace discretă***.

Remarcă: Pentru exprimarea şirurilor original se va renunța la precizarea indicelui $n\in N$ → va fi utilizată, simplu, notația (f_n) în locul notației $(f_n)_{n\in N}$.

Proprietatea .4 (consecință imediată): Transformarea Z este ***liniară*** (rezultă din proprietatea de liniaritate a sumei din definiția 3), adică:

$$Z(c_1(f_n)+c_2(g_n))=c_1Z((f_n))+c_2Z((f_n)),\; \forall (f_n),(g_n)\in \text{O'},\; \forall c_1,c_2\in C. \tag{2.3}$$

Exemplu: Să se calculeze transformatele Z ale următoarelor şiruri original:

1) (σ_n),

2) $e^{\lambda nT}$, cu $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in C$, $\lambda_1 \in R \setminus \{0\}$, $\lambda_2 \in R$, $T > 0$.

3) $(\sin \omega nT)$, $T > 0$,

4) $(\cos \omega nT)$, $T > 0$.

Soluție: 1) Pentru funcția treaptă unitate discretă se pot obține imediat valorile (a se vedea definiția 1): c > 1 şi a = 1. $\rightarrow$ F(z) = Z((σ_n)) este definită pe D_0' = $\{z \in C \mid |z|>1\} \subset C$. Se aplică definiția 3 calculând suma seriei geometrice aferente

$$\rightarrow\ F(z) = Z((\sigma_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

2) Întrucât $\left|e^{\lambda nT}\right|$ = $e^{\lambda_1 nT}$ $\Rightarrow$ indicele de creştere al funcției considerate este: a = $e^{\lambda_1 nT}$ pentru $\lambda_1>0$,

a = 0 pentru $\lambda_1<0$.

Apoi, se procedează ca în cazul anterior. Notând $f_n = e^{\lambda nT}$

$$\rightarrow\ F(z) = Z((f_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda nT}\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{\lambda T}}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{\lambda T}}{z}} = \frac{z}{z-e^{\lambda T}}.$$

3) Se aplică proprietatea de liniaritate 4 $\rightarrow$

$$Z((\sin\omega nT)) = Z\left(\left(\frac{e^{i\omega nT}-e^{-i\varpi nT}}{2i}\right)\right) = \frac{1}{2i}Z\left(\left(e^{i\varpi nT}\right)\right) - \frac{1}{2i}Z\left(\left(e^{-i\varpi nT}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{z}{z-e^{i\varpi T}} - \frac{1}{2i}\frac{z}{z-e^{-i\varpi T}} = \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z-\cos\omega T - i\sin\omega T} - \frac{z}{z-\cos\omega T + i\sin\omega T}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\cdot z\cdot\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1} = \frac{z\cdot\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}.$$

4) Se aplică din nou proprietatea de liniaritate 4 $\rightarrow$

$$Z((\cos\omega nT)) = Z\left(\left(\frac{e^{i\omega nT}+e^{-i\varpi nT}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}Z\left(\left(e^{i\varpi nT}\right)\right) + \frac{1}{2}Z\left(\left(e^{-i\varpi nT}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z - e^{i\omega T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-i\varpi T}} = \frac{1}{2} \cdot z \left[\frac{1}{z - \cos \omega T - i \sin \omega T} + \frac{1}{z - \cos \omega T + i \sin \omega T} \right] =$$

$$= \frac{z}{2} \cdot \frac{z - \cos \omega T + i \sin \omega T + z - \cos \omega T - i \sin \omega T}{\left(z - \cos \omega T\right)^2 + \sin^2 \omega T} = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}.$$

Teoremele legate de transformarea Z – necesare pentru calculul transformatelor *Z* ale unor clase de şiruri original.

Teorema 1 (teorema întârzierii): Fie $(f_n) \in$ O' şi k $\in N^*$ $\rightarrow$ $Z((f_{n-k})) = z^{-k} \cdot\cdot Z((f_n))$. (2.4)

Demonstrație: Se aplică definiția transformării Z, urmată de schimbarea de variabilă n – k = m →

$$Z\left((f_{n-k})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} = z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m} = z^{-k} \cdot Z\left((f_{n-k})\right).$$

Teorema 2 (teorema depăşirii): Fie $(f_n) \in$ O' şi k $\in N^*$. Se notează $F(z)=Z((f_n))$ →

$$Z((f_{n+k})) = z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right]. \qquad (2.5)$$

Demonstrație: Se calculează transformata Z a şirului (f_n) utilizând definiția 3, proprietățile sumei şi schimbarea de variabilă n + k = m:

$$Z\left((f_{n+k})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} f_m z^{-m} =$$

$$= z^k \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \right] = z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \right].$$

Remarcă: Pentru simplitate, în continuare se renunță la utilizarea parantezelor duble la scrierea transformatelor Z → va fi utilizată notația $Z(f_n)$ în locul notației $Z((f_n))$.

Teorema 3 (**teorema amortizării**): Fie $(f_n) \in$ O' şi $F(z)=Z(f_n)$ →

$$Z(f_n e^{-anT}) = F(ze^{aT}) \ , \ \ \forall a,T \in R \ . \tag{2.6}$$

Demonstrație:

$$Z(f_n e^{-anT}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (e^{aT} z)^{-n} = F(ze^{aT}) \, .$$

Teorema 4 (**teorema diferenței originalului**): Fie $(f_n) \in$ O' şi $F(z)=Z(f_n)$ →

$$Z(f_{n+1} - f_n) = (z-1)F(z) - f_0 z \ . \tag{2.7}$$

Demonstrație: Se aplică teorema 2 în condiții de liniaritate →

$$Z(f_{n+1} - f_n) = Z(f_{n+1}) - Z(f_n) = z^1\left[F(z) - f_0\right] - F(z) = (z-1)F(z) - zf_0 \ .$$

Variantă a teoremei 4 (fără demonstrație):

$$Z(f_n - f_{n-1}) = \frac{z-1}{z} F(z) - f_{-1} \ . \tag{2.8}$$

Teorema 5 (**teorema sumei originalului**, fără demonstrație): Fie $(f_n) \in$ O' şi $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

$$\rightarrow \ (g_n) \in \mathrm{O}' \text{ şi } \ \mathrm{Z}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}\mathrm{Z}(\mathrm{f_n}). \tag{2.9}$$

Teorema 6 (teorema valorii inițiale): Fie $(f_n) \in \mathrm{O}'$ şi

$$F(z) = Z(f_n) \ \rightarrow \ f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z). \tag{2.10}$$

Demonstrație: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \ldots$.

Se trece la limită pentru $z \to \infty \ \rightarrow$ (2.10).

Teorema 7 (teorema valorii finale): Fie $(f_n) \in \mathrm{O}'$, $F(z) = Z(f_n)$ şi se presupune că $\exists \lim_{n\to\infty} f_n$.

$$\rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z). \tag{2.11}$$

Demonstrație: Se rescrie termenul general al şirului (f_n) sub forma:

$f_n = f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_n - f_{n-1}) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_n$,

$\Leftrightarrow$ introducerea notației: $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. (1)

Apoi, se aplică transformarea Z relației (1), iar din teorema 5

$$\rightarrow \ \mathrm{Z}(\mathrm{f_n}) = \mathrm{Z}\left(\sum_{k=0}^{n} g_k\right) = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}\mathrm{Z}(\mathrm{g_n}) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Z}(\mathrm{g_n}) = \frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}}\mathrm{F(z)}. \tag{2}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în relația (1) $\rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \ . \tag{3}$$

Însă, aplicând definiția 3 a transformării Z →

$$Z(g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \ . \qquad (4)$$

În final, din (2), (3) şi (4) →

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1} Z(g_n) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z) \text{. q.e.d.}$$

Teorema 8 (**teorema lui Borel**, fără demonstrație): Fie (f_n), $(g_n) \in$ O' → transformata Z produsului de convoluție are expresia:

$$Z((f_n) * (g_n)) = Z(f_n) \cdot Z(g_n) \ . \qquad (2.12)$$

3. Inversa transformării Z

Sunt aplicate două teoreme.

Teorema 9: Fie (f_n), $(g_n) \in$ O' şi $F(z) = Z(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$.

→ şirul original poate fi exprimat în raport cu transformata sa Z prin formula:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} F(z) z^{n-1} dz, \quad \forall n \in N, \qquad (3.1)$$

unde (C) = curbă închisă care include toate singularitățile funcției F(z).

Altfel spus: $(f_n) = Z^{-1}(F(z))$,

unde termenul general al şirului (f_n) se calculează cu formula (3.1).

Pentru evita calculul direct al integralei din membrul drept $\rightarrow$ teorema 10.

Teorema 10 (teoremă de dezvoltare): Fie F(z) = $\frac{Q(z)}{P(z)}$,

cu P şi Q – polinoame relativ prime între ele, grad P = n > grad Q = m $\rightarrow$

$$f_n = \sum_{i=1}^{r} K_i \quad ,$$

în care:

$$K_i = \frac{1}{(q_i - 1)!}\left\{\frac{d^{q_i - 1}}{dz^{q_i - 1}}\left[(z - z_i)^{q_i} F(z) z^{n-1}\right]\right\}_{z = z_i} \quad , \ i = 1 \ldots r, \qquad (3.2)$$

iar z_i, i = 1 … r = polii distincți (având ordinele de multiplicitate q_i) ai funcției F, cu $q_1 + q_2 + \ldots + q_r = n$.

În practică, pentru calculul operativ al transformatelor Z şi al şirurilor original care rezultă din acestea, sunt utilizate **tabele de transformate Z**.

Nr. crt.	Funcția original $f(t)$	Transformata *Z* $f(z) = Z(f_n = f(nT_e))$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\sigma(t)$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$
3.	$t \bullet \sigma(t)$	$\dfrac{T_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
4.	$(t^2/2) \bullet \sigma(t)$	$\dfrac{T_e z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
5.	$e^{-at} \bullet \sigma(t)$	$\dfrac{1}{1 - \exp(-aT_e)z^{-1}}$
6.	$t \bullet e^{-at} \bullet \sigma(t)$	$\dfrac{T_e \exp(-aT_e)z^{-1}}{(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})^2}$
7.	$(1 - e^{-at})\sigma(t)$	$\dfrac{(1 - \exp(-aT_e))z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})}$

8.	$[t-(1-e^{-at})/a]\sigma(t)$	$\dfrac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \dfrac{(1-\exp(-aT_e))z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\exp(-aT_e)z^{-1})}$
9.	$e^{-at}\sin(bt)\sigma(t)$	$\dfrac{\exp(-aT_e)\sin(bT_e)z^{-1}}{N(z^{-1})}$, $N(z^{-1}) = 1-2\exp(-aT_e)\cos(bT_e)z^{-1}+$ $+\exp(-2aT_e)z^{-2}$
10.	$e^{-at}\cos(bt)\sigma(t)$	$\dfrac{1-\exp(-aT_e)\sin(bT_e)z^{-1}}{N(z^{-1})}$

Remarcă: În tabel apar funcții original de forma f(t), cu $t\in R$. Termenul general al şirului original (f_n) se obține:

$$f_n = f(nT_e)\ ,\ \forall n\in N\ , \qquad (3.3)$$

unde T_e = perioada de eşantionare sau pasul de discretizare. Pentru $T_e = 1 \rightarrow$

$$f_n = f(n)\ ,\ \forall n\in N\ . \qquad (3.4)$$

Exemplu: Să se determine şirul original (f_n), astfel încât:

$$Z(f_n) = \frac{-z^2+2z}{(z+1)(z-3)^2} = F(z)\,.$$

Soluție: Pentru început se calculează polii lui F(z): $z_1=-1$ – pol simplu (cu ordinul de multiplicitate $q_1=1$) şi $z_2=3$ – pol dublu (cu ordinul de multiplicitate $q_2=2$). Apoi, se aplică teorema 10 care permite calculul coeficienților K_1 şi K_2:

$$K_1 = \frac{1}{(1-1)!}\cdot\frac{-z^2+2z}{(z-3)^2}\cdot z^{n-1}\Big|_{z=-1} = \frac{1-2}{(-4)^2}\cdot(-1)^{n-1} = \frac{1}{16}(-1)^n \;;$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{-z^2+2z}{z+1}\cdot z^{n-1}\right]_{z=3} = \frac{(-2z+2)(z+1)-(-z^2+2z)}{(z+1)^2}\cdot z^{n-1}\Big|_{z=3} +$$

$$+\frac{-z^2+2z}{z+1}\cdot(n-1)z^{n-2} = \frac{-4\cdot4-(-9+6)}{16}\cdot 3^{n+1} + \frac{-9+6}{4}(n-1)3^{n-2} =$$

$$= -\frac{13}{16}\cdot 3^{n-1} - \frac{3n+3}{4}\cdot 3^{n-2} = -\frac{3^{n-1}}{16}(4n+17)\,.$$

În final, aplicând (3.2) $\rightarrow$ expresia termenului general al şirului (f_n):

$$f_n = K_1 + K_2 = \frac{1}{16}(-1)^n - \frac{4n+17}{16}\cdot 3^{n-1}\,,\ \forall n\in N\,.$$

4. Aplicații

Remember: expresia transformatei Z a funcției treaptă unitate discretă:

$$Z(\sigma_n) = \frac{z}{z-1}\,. \tag{4.1}$$

În plus, fie şirul cu termenul general:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, k \in N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Transformata Z a acestui şir se calculează cu definiția 3:

$$Z(\delta_k(n)) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_k(n) z^{-n} = \frac{1}{z^k}. \tag{4.3}$$

Particularizând **k = 0** $\rightarrow$ termenul general al şirului (δ_n), numit **şirul impuls unitate** (**impulsul Dirac**):

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \in N^*, \end{cases} \tag{4.4}$$

cu transformata Z având expresia (obținută din (4.3)):

$$Z(\delta_n) = 1 . \tag{4.5}$$

Transformarea Z se utilizează la ***rezolvarea unor ecuații discrete***. Modalitatea de rezolvare este cea din cazul transformării Laplace !

Exemplu: Să se rezolve ecuația:

$$y_{n+1} - \alpha y_n = \delta_n , \quad \forall n \in N , \tag{1}$$

cu y_0 – dat, α = const, $\forall n \in N$.

Soluție: Se aplică transformarea Z ambilor membri ai ecuației (1) în condiții de liniaritate:

$$Z(y_{n+1}) - \alpha Z(y_n) = Z(\delta_n). \tag{2}$$

Introducând notația: $Z(y_n) = Y(z)$ $\rightarrow$ ecuația (2) devine:

$Z(y_{n+1}) - \alpha Y(z) = 1.$ (3)

Se aplică teorema 2 $\rightarrow$ $Z(y_{n+1}) = z[Y(z) - y_0].$ (4)

Apoi, se face înlocuirea din (4) în (3) $\rightarrow$

$Y(z) - zy_0 - \alpha Y(z) = 1$, (5)

de unde rezultă imediat expresia lui Y(z):

$$Y(z) = \frac{1 + zy_0}{z - \alpha} \quad . \tag{6}$$

În final, se aplică teorema de dezvoltare 10 $\rightarrow$ expresia termenului general al şirului (y_n), care reprezintă soluția ecuației (1):

$$y_n = (1 + zy_0) \cdot z^{n-1}\Big|_{z=\alpha} = (1 + \alpha y_0) \cdot \alpha^{n-1}, \ \ \forall n \in N^* \ . \tag{7}$$

Exemplu: Să se determine expresia termenului general al şirului (y_n), soluție a ecuației:

$y_n = -2\, y_{n-1} - y_{n-2} + \sigma_n$, $\forall n \in N$, $n \geq 2$. (8)

în condițiile:

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$. (9)

Soluție: Se aplică transformarea Z ambilor membri ai ecuației (8) în condiții de liniaritate $\rightarrow$

$$Z(y_n) = -2Z(y_{n-1}) - Z(y_{n-2}) + Z(\sigma_n). \qquad (10)$$

Apoi, se notează $Z(y_n) = Y(z)$ şi se aplică teorema 1

$$\rightarrow \begin{array}{l} Z(y_{n-1}) = z^{-1}Y(z), \\ Z(y_{n-2}) = z^{-2}Y(z). \end{array} \qquad (11)$$

Se fac înlocuirile din (11) în (10) $\rightarrow$

$$Y(z) = -\frac{2}{z}Y(z) - \frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{z}{z-1} \Leftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^3}{(z-1)(z+1)^2}.$$

Se aplică teorema de dezvoltare 10 $\rightarrow$ soluția ecuației (8):

$$y_n = \left.\frac{z^3 z^{n-1}}{(z+1)^2}\right|_{z=1} + \frac{d}{dz}\cdot\left.\frac{z^3 z^{n-1}}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4} + \left.\frac{(n+2)z^{n-1}(z-1) - z^{n+2}}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{-2(n+2)(-1)^{n+1} - (-1)^{n+2}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n[2n+4-1]}{4} = \frac{1+(-1)^n[2n+3]}{4},$$

$$\forall n \in N, \ n \geq 2. \qquad (12)$$

Legătura cu transformarea Laplace

Teorema 11 (trecerea de la transformata Laplace la transformata Z): Fie T > 0. Se notează $f_n = f(nT_e)$, $\forall n \in N$, L(f(t)) = F(s), $Z(f_n)$ = F(z). Dacă F(s) are expresia din enunțul teoremei 10 $\rightarrow$ F(z) poate fi exprimată sub forma:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{r} K_i, \qquad (4.6)$$

în care:

$$K_i = \frac{1}{(q_i - 1)!}\left\{\frac{d^{q_i - 1}}{ds^{q_i - 1}}\left[(z - s_i)^{q_i}\,\frac{F(s)z}{z - e^{T_e s}}\right]\right\}_{s = s_i},\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{r}}, \tag{4.7}$$

unde s_i $(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{r}})$ = polii distincți ai lui F(s).