Anexa B2

Elemente de reprezentare grafică în plan şi în spaţiu.

1. Tipuri de sisteme de coordonate

a. Coordonate carteziene

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene în plan. Fie P un punct în plan având coordonatele xp pe axa Ox şi yp pe axa Oy. Coordonata xp se mai numeşte ***abscisa punctului P***, iar axa Ox ***axa absciselor***, şi yp se mai numeşte ***ordonata punctului P***, iar axa Oy ***axa ordonatelor***. Se va nota $P(xp,yp)$. Coordonatele carteziene se mai numesc şi ***coordonate liniare***.

Axele Ox şi Oy împart planul în patru regiuni, numite ***cadrane deschise***:

- cadranul I este mulţimea punctelor care au ambele coordonate strict pozitive;
- cadranul II este mulţimea punctelor care au abscisele strict negative şi ordonatele strict pozitive;
- cadranul III este mulţimea punctelor care au ambele coordonate strict negative;
- cadranul IV este mulţimea punctelor care au abscisele strict pozitive şi ordonatele strict negative.

Un sistem de coordonate carteziene în spaţiu se notează cu $xOyz$. Poziţia unui punct P din spaţiul tridimensional este dată de cele trei coordonate ale sale, xp pe axa Ox, yp pe axa Oy şi zp pe axa Oz. Se va nota $P(xp,yp,zp)$.

b. Coordonate polare

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene în plan şi $P(xp,yp)$ un punct din plan diferit de originea O a sistemului. Fie r distanţa de la P la O şi θ unghiul format în sens trigonometric de semidreapta (OP cu axa Ox, $\theta \in [0,2\pi)$. Numerele r şi θ se numesc ***coordonatele polare ale punctului P***. Se notează $P(r,\theta)$. r se numeşte ***raza polară a lui P***, iar θ ***argumentul polar al lui P***.

Legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare ale lui P sunt exprimate de relaţiile:

$$r = \sqrt{xp^2 + yp^2} \ ,$$

$$cos(\theta) = \frac{xp}{\sqrt{xp^2 + yp^2}}, \qquad sin(\theta) = \frac{yp}{\sqrt{xp^2 + yp^2}}, \qquad \theta \in [0,2\pi)$$

c. Coordonate logaritmice

Coordonatele logaritmice reprezintă exprimarea coordonatelor unui punct pe o ***scară logaritmică***, adică ca şi logaritmi într-o bază b precizată ale coordonatelor carteziene ale punctului respectiv. Deoarece logaritmul se poate calcula doar pentru valori strict pozitive, singurele puncte care pot fi reprezentate în coordonate logaritmice sunt cele din cadranul deschis I. Astfel, dacă xOy este un sistem de coordonate carteziene şi $P(xp,yp)$ un punct din cadranul deschis I, atunci coordonatele logaritmice ale punctului P sunt $x=\log_b(xp)$ şi $y=\log_b(yp)$, adică $xp=b^x$ şi $yp=b^y$.

d. Coordonate semilogaritmice

Coordonatele semilogaritmice reprezintă o pereche de coordonate dintre care una este o coordonată carteziană (liniară), iar cealaltă o coordonată logaritmică. Dacă coordonata logaritmică corespunde axei x, atunci se foloseşte denumirea de ***coordonate semilogaritmice pe axa x***. Analog, dacă coordonata logaritmică corespunde axei y, atunci se foloseşte denumirea de ***coordonate semilogaritmice pe axa y***.

2. Figuri geometrice în plan

a. Dreapta

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene. Orice dreaptă paralelă cu Ox se numeşte ***dreaptă orizontală***. Orice dreaptă paralelă cu Oy se numeşte ***dreaptă verticală***. Orice dreaptă care nu este nici orizontală şi nici verticală se numeşte ***dreaptă oblică***. Tangenta unghiului format de o dreaptă oblică cu axa Ox (unghi cuprins în intervalul $[0,\pi]$) se numeşte ***panta dreptei oblice*** şi se notează cu m.

Ecuaţia dreptei oblice determinată de un punct şi de o pantă

Fie d o dreaptă oblică de pantă m şi $P(xp,yp)$ un punct al dreptei d. Atunci ecuaţia dreptei d este:

$$y - yp = m\cdot(x - xy)$$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte

Fie d o dreaptă şi $P(xp,yp)$ şi $R(xr,yr)$ două puncte distincte ale dreptei d. Atunci ecuaţia dreptei d este:

$x = xp$, *când dreapta este verticală*

$y = yp$, *când dreapta este orizontală*

$$\frac{x-xp}{xr-xp} = \frac{y-yp}{yr-yp}\ ,\ \text{când dreapta este oblică}$$

Ecuaţia carteziană generală a dreptei

Fie d o dreaptă. Ecuaţia carteziană generală a dreptei d are forma implicită:

$$a\cdot x+b\cdot y+c = 0, \qquad \text{cu } a,b,c\in\mathbf{R},\quad a^2+b^2\neq 0$$

b. Cercul

Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat se numeşte ***cerc***. Punctul dat poartă denumirea de ***centrul cercului***, iar distanţa de la acesta la oricare din punctele cercului se numeşte ***raza cercului***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene, iar $\mathscr{C}$ cercul de centru $C(xc,yc)$ şi de rază r. Ecuaţiile cercului $\mathscr{C}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a cercului:*** $(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = r^2$
- ***ecuaţiile explicite ale cercului:*** $y = yc \pm \sqrt{r^2 - (x - xc)^2}, \quad x \in [xc - r, xc + r]$
- ***ecuaţiile parametrice ale cercului:*** $\begin{cases} x = xc + r \cdot \cos(\theta) \\ y = yc + r \cdot \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi)$

Mulţimea punctelor a căror distanţă la C este strict mai mică decât r se numeşte ***interiorul cercului***. Reuniunea dintre cerc şi interiorul său se numeşte ***disc de centru C şi rază r.***

c. Elipsa

Locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că suma distanţelor lor la două puncte fixe este constantă se numeşte ***elipsă***. Cele două puncte fixe se numesc ***focarele elipsei***. Distanţa dintre cele două focare se numeşte ***distanţă focală***, iar distanţele de la un punct P oarecare al elipsei la cele două focare se numesc ***razele focale ale punctului P***.

Fie F şi F' cele două focare, C mijlocul segmentului $[FF']$, A şi A' punctele de intersecţie a dreptei FF' cu elipsa, B şi B' intersecţia dreptei perpendiculare pe FF' în C cu elipsa, a distanţa CA şi b distanţa CB. C este ***centrul de simetrie al elipsei***, iar AA' şi BB' sunt ***axele de simetrie ale elipsei***. a şi b se numesc ***semiaxele elipsei***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene şi (xc,yc) coordonatele centrului de simetrie C al elipsei. În continuare se va considera că dreapta FF' este paralelă cu axa Ox. Fie $\mathscr{E}$ elipsa de centru $C(xc,yc)$ şi semiaxe a şi b. Ecuaţiile elipsei $\mathscr{E}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a elipsei:*** $\dfrac{(x - xc)^2}{a^2} + \dfrac{(y - yc)^2}{b^2} = 1$
- ***ecuaţiile explicite ale elipsei:*** $y = yc \pm b\sqrt{\left(1 - \dfrac{(x - xc)^2}{a^2}\right)}, \quad x \in [xc - a, xc + a]$
- ***ecuaţiile parametrice ale elipsei:*** $\begin{cases} x = xc + a \cdot cos(\theta) \\ y = yc + b \cdot sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi)$

d. Hiperbola

Locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că modulul diferenţei distanţelor lor la două puncte fixe este constant se numeşte ***hiperbolă***. Cele două puncte fixe se numesc ***focarele hiperbolei***. Distanţa dintre cele două focare se numeşte ***distanţă focală***, iar distanţa de la un punct P oarecare al hiperbolei la cele două focare se numesc ***razele focale ale punctului P***.

Fie F şi F' cele două focare, C mijlocul segmentului $[FF']$, A şi A' punctele de intersecţie a dreptei FF' cu hiperbola, c distanţa CF, a distanţa CA ($a<c$) şi $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. C este ***centrul de simetrie al hiperbolei***, iar FF' şi mediatoarea segmentului $[FF']$ sunt ***axele de simetrie ale hiperbolei***. a şi b se numesc ***semiaxele hiperbolei***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene şi (xc,yc) coordonatele centrului de simetrie C al hiperbolei. În continuare se va considera că dreapta FF' este paralelă cu axa Ox. Fie $\mathscr{H}$ hiperbola de centru $C(xc,yc)$ şi semiaxe a şi b. Ecuaţiile hiperbolei $\mathscr{H}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a hiperbolei:*** $\frac{(x-xc)^2}{a^2} - \frac{(y-yc)^2}{b^2} = 1$
- ***ecuaţiile explicite ale hiperbolei:*** $y = yc \pm b\sqrt{\left(\frac{(x-xc)^2}{a^2} - 1\right)}$,

$$x \in \left(-\infty, xc-a\right] \cup \left[xc+a, \infty\right)$$

Mulţimea punctelor de coordonate (x,y) care satisfac ecuaţia:

$$-\frac{(x-xc)^2}{a^2} + \frac{(y-yc)^2}{b^2} = 1$$

reprezintă o hiperbolă $\mathscr{H}'$ de centru $C(xc,yc)$ şi semiaxe b şi a, pentru care axa focarelor este paralelă cu axa Oy. Hiperbolele $\mathscr{H}$ şi $\mathscr{H}'$ se numesc ***hiperbole conjugate una alteia***.

O hiperbolă de semiaxe egale se numeşte ***hiperbolă echilateră***.

e. Parabola

Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix şi de o axă fixă se numeşte ***parabolă***. Punctul fix se numeşte ***focarul parabolei***, iar axa fixă ***directoarea parabolei***. Distanţa de la un punct oarecare P al parabolei la focar se numeşte ***raza focală a punctului P***. Fie A proiecţia focarului pe directoarea parabolei, C intersecţia dreptei FA cu parabola şi p distanţa dintre focar şi A. C se numeşte ***vârful parabolei***. Dreapta AC este ***dreaptă de simetrie a parabolei***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene şi (xc,yc) coordonatele vârfului C al parabolei. În continuare se va considera că dreapta AF este paralelă cu axa Ox. Fie $\mathscr{P}$ parabola de vârf $C(xc,yc)$ şi axă de simetrie AF. Ecuaţiile parabolei $\mathscr{P}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a parabolei:*** $(y-yc)^2 - 2p(x-xc) = 0$
- ***ecuaţiile explicite ale parabolei:*** $y = yc \pm \sqrt{2p(x-xc)}, \qquad x \geq xc$

3. Figuri geometrice în spaţiu

a. Dreapta

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi d o dreaptă în spaţiul structurat de acesta.

Ecuaţiile carteziane generale ale dreptei

Analitic, dreapta d se exprimă ca intersecţie a două plane, adică prin sistemul de ecuaţii alcătuit din ecuaţiile celor plane. Astfel, dacă $\mathcal{P}_1$, de ecuaţie $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, şi $\mathcal{P}_2$, de ecuaţie $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, sunt cele două plane, atunci, ecuaţiile dreptei d sunt:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \quad a_1, ..., d_2 \in \boldsymbol{R}$$

Ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte distincte

Fie $P(xp,yp,zp)$ şi $R(xr,yr,zr)$ două puncte distincte ale dreptei d. Atunci ecuaţiile parametrice dreptei d determinate de punctele P şi R sunt:

$$\begin{cases} x = xp + k(xr - xp) \\ y = yp + k(yr - yp), \qquad k \in \boldsymbol{R} \\ z = zp + k(zr - zp) \end{cases}$$

b. Sfera

Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat se numeşte ***sferă***. Punctul dat poartă denumirea de ***centrul sferei***, iar distanţa de la acesta la oricare din punctele sferei se numeşte ***raza sferei***.

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi $\mathcal{S}$ sfera de centru $C(xc,yc,zc)$ şi de rază r. Ecuaţiile sferei $\mathcal{S}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a sferei:*** $(x - xc)^2 + (y - yc)^2 + (z - zc)^2 = r^2$
- ***ecuaţiile parametrice ale sferei:*** $$\begin{cases} x = xc + r \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \\ y = yc + r \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\beta), \quad \alpha \in [0,2\pi), \beta \in [-\pi,\pi] \\ z = zc + r \cdot sin(\beta) \end{cases}$$

Mulţimea punctelor a căror distanţă la C este strict mai mică decât r se numeşte ***interiorul sferei***. Reuniunea dintre sferă şi interiorul său se numeşte ***bilă de centru C şi rază r.***

b. Elipsoidul

Un ***elipsoid*** este o suprafaţă tridimensională închisă cu proprietatea că intersecţia ei cu orice plan este o elipsă sau un cerc. Un elipsoid are trei ***axe de simetrie***, care se intersectează într-un punct şi care sunt perpendiculare două câte două. Punctul de intersecţie se numeşte ***centru de simetrie***. Fie *AA'*, *BB'* şi *DD'* intersecţiile celor trei axe de simetrie cu elipsoidul, iar *C* centrul de simetrie. Distanţele *CA, CB* şi *CD* se numesc ***semiaxele elipsoidului*** şi se notează cu a, b, respectiv c.

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi $\mathcal{EL}$ un elipsoid de semiaxe a,b şi c, şi de centru de simetrie *C*(*xc*,*yc*,*zc*). Ecuațiile elipsoidului $\mathcal{ES}$ sunt:

- ***ecuația implicită a elipsoidului:*** $$\frac{(x-xc)^2}{a^2}+\frac{(y-yc)^2}{b^2}+\frac{(z-zc)^2}{c^2}=1$$
- ***ecuațiile parametrice ale elipsoidului:*** $$\begin{cases} x = xc + a\cdot cos(\alpha)\cdot cos(\beta) \\ y = yc + b\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\beta), \quad \alpha\in[0,2\pi), \beta\in[-\pi,\pi] \\ z = zc + c\cdot sin(\beta) \end{cases}$$

c. Prisma

Fie $\mathcal{S}$ o suprafață poligonală, inclusă într-un plan α, *d* o dreaptă care nu aparține planului α şi nu este nici paralelă cu acesta, şi α' un plan paralel cu α. Pentru fiecare punct *P* al suprafeței poligonale $\mathcal{S}$ fie *P'* intersecția dintre planul α' şi paralela la *d* dusă prin *P*. Reuniunea tuturor segmentelor [*PP'*], atunci când *P* parcurge suprafața $\mathcal{S}$, se numeşte ***prismă***. Fie $\mathcal{S}'$ mulțimea tuturor punctelor *P'*. $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ se numesc ***bazele prismei***. $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ sunt congruente.

Dacă dreapta *d* este perpendiculară pe planul α, atunci prisma este o ***prisma dreaptă***. O prismă dreaptă a cărei bază este o suprafață poligonală regulată se numeşte ***prismă regulată***. O prismă a cărei bază este mărginită de un paralelogram se numeşte ***paralelipiped.*** Un paralelipiped drept se numeşte ***paralelipiped dreptunghic.*** Un paralelipiped dreptunghic care are doar suprafețe mărginite de pătrate se numeşte ***cub***.

d. Piramida

Fie $\mathcal{S}$ o suprafață poligonală, inclusă într-un plan α, şi *V* un punct care nu aparține planului α. Reuniunea tuturor segmentelor [*VP*], atunci când *P* parcurge suprafața $\mathcal{S}$, se numeşte ***piramidă de vârf V şi bază*** $\mathcal{S}$. Distanța de la *V* la planul α se numeşte ***înălțimea piramidei***.

O piramidă a cărei bază este o suprafață poligonală regulată şi proiecția lui *V* pe α este centru lui $\mathcal{S}$ se numeşte ***piramidă regulată***. O piramidă cu baza suprafață triunghiulară se numeşte ***tetraedru***.

Fie α' un plan paralel cu α şi care intersectează piramida. Fie $\mathcal{S}'$ intersecția planului α' cu piramida. $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ sunt asemenea. Mulțimea punctelor piramidei cuprinse între planurile α şi α' împreună cu cele două suprafețe $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ se numeşte ***trunchi de piramidă***. $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}'$ se numesc ***bazele trunchiului de piramidă***. Distanța dintre cele două plane se numeşte ***înălțimea trunchiului de piramidă***. Un trunchi de piramidă obținut dintr-o piramidă regulată se numeşte ***trunchi de piramidă regulată***.

e. Cilindrul

Fie $\mathcal{D}$ un disc, inclus într-un plan α, *d* o dreaptă care nu aparține planului α şi nu este nici paralelă cu acesta, şi α' un plan paralel cu α. Pentru fiecare punct *P* al discului $\mathcal{D}$ fie *P'* intersecția dintre planul α' şi paralela la *d* dusă prin *P*. Reuniunea tuturor segmentelor [*PP'*], atunci când *P* parcurge discul $\mathcal{D}$, se numeşte ***cilindru circular***. Fie $\mathcal{D}'$ mulțimea tuturor punctelor *P'*. $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ se numesc ***bazele cilindrului circular***. $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ au raze egale.

Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci cilindrul este un ***cilindru circular drept***.

f. Conul

Fie $\mathscr{D}$ un disc, inclus într-un plan α, şi V un punct care nu aparține planului α. Reuniunea tuturor segmentelor $[VP]$, atunci când P parcurge discul $\mathscr{D}$, se numeşte ***con circular de vârf V şi bază*** $\mathscr{D}$. Distanța de la V la planul α se numeşte ***înălțimea conului***.

Un con pentru care proiecția vârfului pe planul bazei coincide cu centrul bazei se numeşte ***con drept***.

Fie α' un plan paralel cu α şi care intersectează conul. Fie $\mathscr{D}'$ intersecția planului α' cu piramida. Mulțimea punctelor conului cuprinse între planurile α şi α' împreună cu cele două discuri $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}'$ se numeşte ***trunchi de con***. $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}'$ se numesc ***bazele trunchiului de con***. Distanța dintre cele două plane se numeşte ***înălțimea trunchiului de con***. Un trunchi de con obținut dintr-un con drept se numeşte ***trunchi de con drept***.