Anexa B3
Elemente despre rezolvarea sistemelor liniare

1. Noțiuni generale

Fie sistemul de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

cu $a_{i,j} \in \boldsymbol{R}, \quad b_i \in \boldsymbol{R}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Introducând notațiile:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

se obține ***forma matriceală a sistemului de ecuații liniare***:

$$A \cdot X = b$$

Matricea A se numeşte ***matricea coeficienților***, matricea b ***vectorul-coloană al termenilor liberi*** şi X ***vectorul-coloană al necunoscutelor sistemului de ecuații liniare***.

Matricea (A,b) cu m linii şi $n+1$ coloane obținută prin alipirea la dreapta matricei A a vectorului b, se numeşte ***matricea extinsă a sistemului***.

În funcție de rezultatul comparației lui m cu n se disting următoarele tipuri de sisteme:

- ***sistem pătratic***, dacă $m = n$;
- ***sistem supradeterminat***, dacă $m > n$;
- ***sistem subdeterminat***, dacă $m < n$.

Un sistem de ecuații liniare care are cel puțin o soluție se numeşte ***sistem compatibil***. Un sistem compatibil care are o singură soluție se numeşte ***sistem compatibil determinat***. Un sistem compatibil care are mai multe soluții se numeşte ***sistem compatibil nedeterminat***. Un sistem care nu are nici o soluție se numeşte ***sistem incompatibil***.

Soluția unui sistem pătratic de ecuații liniare compatibil determinat, se poate obține matriceal prin relația:

$$X = A^{-1} \cdot b$$

Un sistem compatibil nedeterminat are o infinitate de soluții.

2. Criterii de compatibilitate

Teorema lui Kronecker – Capelli: Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse a sistemului.

Un sistem compatibil de ecuații liniare este determinat dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu numărul necunoscutelor sistemului.

Un sistem pătratic de ecuații liniare este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul matricei coeficienților este nenul.

Verificarea compatibilitații unui sistem de ecuații liniare se poate face în următorul mod:

a) cazul sistemelor pătratice:
   - dacă determinantul matricei coeficienților este nenul, sistemul este compatibil determinat;
   - în caz contrar:
     - dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, atunci sistemul este compatibil nedeterminat;
     - altfel, sistemul este incompatibil.

b) cazul sistemelor oarecare:
   - dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, atunci sistemul este compatibil; distingem două subcazuri:
     - dacă rangul matricei sistemului este egal cu numărul necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil determinat;
     - altfel, sistemul este compatibil nedeterminat;
   - în caz contrar, sistemul este incompatibil.

3. Sisteme de ecuații liniare omogene

Un caz particular de sisteme de ecuații liniare îl reprezintă ***sistemele de ecuații liniare omogene***, adică sisteme pentru care b=0.

Un sistem omogen este întotdeauna compatibil, deoarece el admite întotdeauna ***soluția nulă***: $X = 0$.

Dacă rangul matricei sistemului omogen este egal cu numărul necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil determinat. În caz contrar (rangul este mai mic decât numărul necunoscutelor) sistemul este compatibil nedeterminat.

4. Pseudo-inversa Moore-Penrose a unei matrice

Pseudo-inversa Moore-Penrose a matricei A este o matrice B de aceeaşi dimensiune ca şi A^T, care îndeplineşte următoarele condiții:

(a) $A \cdot B \cdot A = A$ şi $B \cdot A \cdot B = B$,

(b) $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt matrice hermitiene.

(***O matrice hermitiană*** este o matrice pătratică cu proprietatea că ea coincide cu transpusa conjugatei sale.)

Proprietăți:

1. Orice matrice are o unică pseudo-inversă Moore-Penrose.
2. Pseudo-inversa unei matrice inversabile coincide cu inverse matricei.
3. Pseudo-inversa pseudo-inversei unei matrice este matricea însăşi.

Fie sistemul compatibil de ecuații liniare cu n necunoscute:

$$A \cdot X = b$$

Atunci

$$Xa = A^{+} \cdot b$$

este o soluție aproximativă a sistemului de ecuații liniare, cu proprietatea că are norma euclidiană minimă dintre toate n-uplurile X pentru care $\|A \cdot X - b\|^2$ este minimă, unde cu $\|\cdot\|^2$ s-a notat norma euclidiană.