Anexa B8

Elemente despre rezolvarea ecuațiilor diferențiale şi a sistemelor de ecuații diferențiale

1. Ecuații diferențiale

Problema rezolvării unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiție inițială se pune astfel:

Fiind dată ecuația diferențială:

$y' = f(x,y), \quad f:[a,b]\times I \to \boldsymbol{R}, \quad [a,b], I \subset \boldsymbol{R}$

(I fiind un interval) şi condiția inițială:

$y(x_0) = y_0,\ x_0 = a$

să se determine funcția $y : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y(x)$, care verifică relațiile de mai sus.

Problema rezolvării unei ecuații diferențiale cu condiție inițială se mai numeşte ***problemă Cauchy***.

Prin utilizarea metodelor numerice pentru rezolvarea problemei enunțate, se obțin valorile $y_1, y_2,..., y_n$ care aproximează valorile $y(x_1), y(x_2),..., y(x_n)$ ale funcției-soluție y într-un set de n puncte ale intervalului $[a,b]$, $x_1<x_2<\ldots<x_n$, $x_1 =a$, $x_n = b$.

În funcție de numărul de puncte anterior calculate utilizat în determinarea punctului curent (x_i,y_i), metodele numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale se împart în două categorii:

i) metode monopas (numite şi metode cu paşi separați), care utilizează doar valorile corespunzătoare punctului precedent (x_{i-1}, y_{i-1});

ii) metode multipas (numite şi metode cu paşi legați), care utilizează valorile corespunzătoare mai multor puncte anterior determinate, (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i-2}, y_{i-2}),... .

Din prima categorie face parte metoda ***Runge-Kutta***.

Din a doua categorie fac parte metoda ***Adams-Bashforth-Moulton***, diferite variante îmbunătățite ale metodei Runge-Kutta ş.a.

2. Sisteme de ecuații diferențiale

Problema rezolvării unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale este:

Fiind dat sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$f_i : [a,b] \times I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \to \boldsymbol{R}, \quad i = 1,2,...,n, \quad [a,b], I_1, I_2 \dots, I_n \subset \boldsymbol{R}$$

(I_i fiind intervale, i=1,2,...,n) şi condiţiile iniţiale:

$y_1(x_0) = y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, ..., y_n(x_0) = y_{0n}, \quad x_0 = a$

să se determine funcţiile $y_1 : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_1(x)$, $y_2 : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_2(x)$, ..., $y_n : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_n(x)$, care verifică relaţiile de mai sus.

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul I cu condiţii iniţiale se utilizează metode numerice având ca punct de plecare metodele de rezolvare din cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul I cu condiţii iniţiale.

3. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordin superior

Problemele de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior, respectiv a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordin superior, se pun în mod asemănător problemelor corespunzătoare formulate la punctele 1 şi 2, cu adăugarea şi a condiţiilor iniţiale referitoare la derivatele de ordin superior ale funcţiilor-necunoscute.

Pentru rezolvarea acestor probleme, ecuaţia diferenţială de ordin superior, respectiv sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordin superior, trebuiesc aduse la forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

În continuare se exemplifică aducerea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n la forma unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul I:

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$
$$f : [a,b] \times I \times I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \to \boldsymbol{R}, \quad [a,b], I, I_1, I_2, \dots, I_{n-1} \subset \boldsymbol{R}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02}, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n},\ x_0 = a$$

Pentru rezolvarea problemei, se introduc notaţiile $y_i = y^{(i)}$, i = 1,2,...,n.

Se observă că $y_i' = \left(y^{(i)}\right)' = y^{(i+1)} = y_{i+1}$, i = 1,2,...,n-1. Prin urmare, ecuaţia diferenţială de ordinul n cu condiţii iniţiale este echivalentă cu următorul sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul I:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

cu condițiile inițiale:

$y_1(x_0) = y_{01}$, $y_2(x_0) = y_{02}$, ..., $y_n(x_0) = y_{0n}$.