Lucrarea de laborator 3
Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Obiectivele lucrării

- recapitularea unor elemente legate de rezolvarea sistemelor de ecuații liniare,
- fixarea cunoştințelor privitoare la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare folosind mediul de programare Matlab,
- familiarizarea cu calculul simbolic în Matlab şi cu rezolvarea sistemelor de ecuații liniare folosind calea simbolică,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

1. Exemple de studiat

Toate exemplele corespund formei canonice A·X = b (a se vedea Anexa A3).

Înainte de a rezolva un sistem de ecuații liniare trebuie verificat dacă acest sistem este compatibil (a se vedea Anexa B3).

Exemplul 3.1: Să se rezolve sistemul de mai jos utilizând metoda inversării matriceale:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

Soluție: Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
A=[5 4 1; 6 3 2; 1 1 1]; % matricea coeficientilor
% rezolvarea sistemului
if det(A)~=0 % daca sistemul este compatibil determinat
    b=[0; 5; -7]; % vectorul-coloana al termenilor liberi
    X=inv(A)*b
else
    disp('Sistemul nu este compatibil determinat.')
end
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
X =
    6.2500
   -6.0000
   -7.2500
```

Adică: $x_1 = 6.25$, $x_2 = -6$, $x_3 = -7.25$.

Exemplul 3.2: Să se rezolve următorul sistem folosind metoda împărțirii la stânga:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ -6x_1 + 8x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>*Soluție.*</u>: Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
A=[2 -3 0; -6 8 -1; 0 3 4]; % matricea coeficientilor
% rezolvarea sistemului
if det(A)~=0
    b=[7 -5 1]'; % vectorul-coloana al termenilor liberi
    X=A\b
else
    disp('Sistemul nu este compatibil determinat.')
end
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
X =
  -94.0000
  -65.0000
   49.0000
```

Adică: x_1 = -94 , x_2 = -65 , x_3 = 49.

Exemplul 3.3: Să se determine pentru sistemele de mai jos una-două soluții particulare, folosind metodele pseudo-inversării şi a împărțirii la stânga.

a) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ -6x_1 + 8x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x - y + z - 2t = 6 \\ -4x + 4y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

<u>*Soluție.*</u>:

a) Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
A=[2 -3 0; -6 8 -1; 0 3 4; -4 8 3]; % matricea coeficientilor
b=[7; -5; 1; 3]; % vectorul-coloana al termenilor liberi
% rezolvarea sistemului
if rank(A)==rank([A b]) % daca sistemul este compatibil
    disp('metoda pseudo-inversarii')
    X=pinv(A)*b
    disp('metoda impartirii la stanga')
    X=A\b
else
```

```
    disp('Sistemul nu este compatibil.')
end
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
metoda pseudo-inversarii
X =
  -94.0000
  -65.0000
   49.0000
metoda impartirii la stanga
X =
  -94.0000
  -65.0000
   49.0000
```

b) Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
A=[3 -1 1 -2; -4 4 2 1]; % matricea coeficientilor
b=[6; 0]; % vectorul-coloana al termenilor liberi
% rezolvarea sistemului
if rank(A)==rank([A b])
    disp('metoda pseudo-inversarii')
    X=pinv(A)*b
    disp('metoda impartirii la stanga')
    X=A\b
else
    disp('Sistemul nu este compatibil.')
end
```

Executând secvența de mai sus, se obține:

```
metoda pseudo-inversarii
X =
    0.9431
    0.5418
    1.3846
   -1.1639
metoda impartirii la stanga
X =
    1.2000
         0
    2.4000
         0
```

Observații: 1. Pentru testarea compatibilității s-a folosit teorema lui Kronecker-Capelli. Matricea extinsă s-a obținut în Matlab prin concatenarea matricei A cu vectorul-coloană b.

2. În cazul primului sistem, care este compatibil determinat (Verificați!) s-au obținut, evident, soluții identice prin utilizarea celor două metode. În cazul celui de-al doilea sistem, care este compatibil nedeterminat, prin utilizarea celor două

metode s-au obținut două soluții particulare distincte. Rezolvarea completă a acestui sistem apare în exemplul 3.4.

Exemplul 3.4: Să se rezolve sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 3x - y + z - 2t = 6 \\ -4x + 4y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

<u>*Soluție*</u>*:* Sistemul de ecuații liniare considerat este un sistem subdeterminat. El poate fi rezolvat doar pe cale simbolică. Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
clc
% pas 1: se determina rangul matricei sistemului
A=[3 -1 1 -2;-4 4 2 1];
r=rank(A) % se obtine 2
% prin urmare, 2 variabile sunt independente, si 2 variabile
% sunt dependente de primele

% pas 2: se cauta un minor de ordinul 2 nenul, pentru a
% stabili variabilele dependente; de exemplu:
rminor=rank(A(:,[1 2])) % se obtine 2
% x,y devin variabilele dependente, in raport cu care se
% rezolva sistemul;
% acesta se rescrie sub forma:
% 3x-y=6-z+2t;  -4x+4y=-2z-t;

disp('sistemul este compatibil nedeterminat')
disp(blanks(1)')

% pas 3: se rezolva sistemul de mai sus:
% se creeaza obiectele simbolice
syms z t;
% matricea sistemului
Aredus=A(:,[1 2]);
% vectorul termenilor liberi
bredus=[6-z+2*t; -2*z-t];
% rezolvarea sistemului cu metoda inversarii
s=inv(Aredus)*bredus
% rezolvarea sistemului cu operatorul de impartire la stanga
ss=Aredus\bredus
disp(blanks(1)')
pause
disp('Solutia sistemului dat este:')
x=s(1)
y=s(2)
disp('z,t numere reale oarecare')
```

Se obțin rezultatele:

```
r =
```

```
     2
rminor =
     2
sistemul este compatibil nedeterminat

s =
 3-3/4*z+7/8*t
 3-5/4*z+5/8*t
ss =
 3-3/4*z+7/8*t
 3-5/4*z+5/8*t

Solutia sistemului dat este:
x =
3-3/4*z+7/8*t
y =
3-5/4*z+5/8*t
z,t numere reale oarecare
```

Prin urmare, a fost obținută soluția:

$x=3-\frac{3}{4}\cdot z+\frac{7}{8}\cdot t$, $y=3-\frac{5}{4}\cdot z+\frac{5}{8}\cdot t$, $z\in\mathbf{R}$, $t\in\mathbf{R}$.

Acest sistem nu poate fi rezolvat complet pe cale numerică. În plus, cele două modalități de rezolvare dau rezultate diferite, care corespund unor valori particulare ale soluției (a se vedea exemplul 3.3.b)

Observații: 1. Funcția Matlab `blanks` creează spații între şirurile de caratere.

2. Comanda Matlab `pause` are ca efect oprirea momentană a execuției programului. Execuția se continuă numai după apăsarea unei taste.

Exemplul 3.5: Să se rezolve sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} mx-nz=q \\ nx-my=0 \\ my+mz-2q=0 \end{cases}$$, în necunoscutele *x*, *y*, *z*

cu parametri *m, n*, din care cel puțin unul este nenul.

Soluție: Fiind sistem cu parametri, el se poate rezolva doar cu ajutorul toolbox-ului de calcul simbolic. Este necesar un studiu de compatibilitate al sistemului, în funcție de diverse valori ale parametrilor, rezolvarea efectuându-se pe cazuri, mediul Matlab fiind necesar doar pentru efectuarea de calcule simbolice sau numerice si de substuții ale parametrilor cu valori particulare.

Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
% se creeaza obiectele simbolice
m=sym('m');
```

```
n=sym('n');
q=sym('q');
% matricea sistemului
A=[m 0 -n;n -m 0;0 m m];
% vectorul coloana al temenilor liberi
b=[q; 0; 2*q];

% ** Discutie **
% determinantul sistemului
d=det(A)    % se obtine d = -m^3-n^2*m
factor(d)  % se obtine -m*(m^2+n^2)
% se observa ca d==0 daca si numai daca m==0

% cazul d~=0: sistem compatibil determinat
disp('Cazul: sistem compatibil determinat')
% solutia calculata cu metoda inversarii matriceale
s=inv(A)*b
% solutia calculata cu operatorul de impartire la stanga
ss=A\b
disp(blanks(2)')
pause
clc

% cazul d==0
% substituirea lui m cu valoarea 0
A=subs(A,m,0)
% se observa ca ultima linie a lui A contine doar elemente
% nule, dar, ultimul element al lui b este 2*q
% prin urmare sistemul este incompatibil daca q~=0
% si compatibil nedeterminat, daca q==0
disp('Cazul: m==0 si q~=0 -> sistem incompatibil')
disp(blanks(2)')
pause
clc

% cazul sistem compatibil nedeterminat
disp('Cazul: sistem compatibil nedeterminat')
% substituirea lui q cu valoarea 0
b=subs(b,q,0);
% sistemul devine:
% -n*z==0; n*x==0;
% m fiind 0, rezulta din ipoteza ca n este nenul
disp('Cazul: m==0, n~=0, q==0')
disp('Solutia: (0,y,0) cu y real oarecare')
```

Se obțin rezultatele:

```
d =
-m^3-n^2*m
ans =
-m*(m^2+n^2)
Cazul: sistem compatibil determinat
```

```
s =
     m/(m^2+n^2)*q+2*n/(m^2+n^2)*q
 n/(m^2+n^2)*q+2*n^2/m/(m^2+n^2)*q
    -n/(m^2+n^2)*q+2*m/(m^2+n^2)*q
ss =
     q*(m+2*n)/(m^2+n^2)
 q*n*(m+2*n)/m/(m^2+n^2)
    -q*(n-2*m)/(m^2+n^2)
A =
[  0,  0, -n]
[  n,  0,  0]
[  0,  0,  0]
Cazul: m==0 si q~=0 -> sistem incompatibil
Cazul: sistem compatibil nedeterminat
Cazul: m==0, n~=0, q==0
Solutia: (0,y,0) cu y real oarecare
```

Exemplul 3.6: Să se comparare metodele studiate de rezolvare a sistemelor din punct de vedere al timpului de execuție şi al preciziei soluției în cazul unui sistem pătratic compatibil determinat de ecuații liniare de dimensiuni mari.

Soluție: Pentru generarea unei matrice de dimensiuni mari s-a optat pentru folosirea funcției Matlab *rand*, care generează o matrice de numere aleatoare uniform distribuite.

Se execută următoarea secvență de program Matlab:

```
% matricea sistemului, solutia exacta, vectorul termenilor
% liberi:
A=rand(700); x=rand(700,1); b=A*x;
%  timpii de execuție:
tic; y=inv(A)*b; timp1=toc
timp1 =
    0.1671
tic; z=A\b; timp2=toc
timp2 =
    0.0685
%  precizia solutiilor calculate:
n1=norm(A·y-b)
n1 =
  3.3005e-010
n2=norm(A·z-b)
n2 =
  5.9342e-012
n1/n2
ans =
    55.6182
```

Întrucât în primul caz – utilizarea metodei inversării - timpul de execuție este 0.1671 secunde şi eroarea $3.3005 \cdot 10^{-10}$, iar în al doilea caz – utilizarea metodei împărțirii la stânga – timpul de execuție este 0.0685 secunde şi eroarea $5.9342 \cdot 10^{-12}$, se observă că metoda prin împărțirea la stînga a matricelor este mai performantă decât metoda inversării matriceale, atât din punct de vedere al timpului de execuție, cât şi al preciziei soluției obținute.

2. Probleme de rezolvat

P3.1. Folosind mediul Matlab, să se analizeze dacă următorul sistem de ecuații liniare este compatibil determinat şi, în caz afirmativ, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 3z = -1 \end{cases}.$$

P3.2. Folosind mediul Matlab, să se determine rangul matricei coeficienților şi câte o soluție aproximativă pentru sistemele de ecuații liniare de mai jos:

a) $$\begin{cases} 4x + 3y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 3z = -1 \\ 4x + 4y + 3z = 1 \end{cases};$$

b) $$\begin{cases} -6\mathrm{x} + 8\mathrm{y} - \mathrm{z} = -5 \\ 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 7 \end{cases}.$$

P3.3. Să se scrie un program care primeşte ca parametri matricea coeficienților unui sistem oarecare de ecuații liniare şi vectorul termenilor liberi şi returnează soluția sistemului, în cazul în care este compatibil determinat, sau un mesaj corespunzător, în cazul în care este compatibil nedeterminat sau incompatibil.

P3.4. Folosind mediul Matlab, să se rezolve sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} -6\mathrm{x} + 8\mathrm{y} - \mathrm{z} = -5 \\ 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 7 \end{cases}.$$

P3.5. Folosind mediul Matlab, să se rezolve următoarele sisteme de ecuații liniare cu parametri şi necunoscutele x,y,z:

a) $$\begin{cases} \mathrm{ax} - \mathrm{by} = \mathrm{p} \\ -\mathrm{bx} + \mathrm{by} - \mathrm{cz} = -2\mathrm{q} \\ \mathrm{cy} + \mathrm{az} = \mathrm{p} + \mathrm{q} \end{cases};$$

b) $$\begin{cases} \alpha x - \beta y + z = \gamma \\ -\gamma x + y + \beta z = \alpha \\ x + \gamma y - \alpha z = \beta \end{cases}.$$

P3.6. Să se scrie un program care primeşte ca argumente matricea coeficienţilor şi vectorul termenilor liberi ai unui sistem oarecare de ecuaţii liniare şi care clasifică sistemul într-una din categoriile: i) compatibil determinat, ii) compatibil nedeterminat sau iii) incompatibil, şi afişează un mesaj corespunzător.

P3.7. Să se realizeze un studiu de caz asemănător exemplului 3.6. pentru situaţia unui sistem compatibil nedeterminat pentru care se doreşte determinarea unei soluţii particulare.

3. Întrebări recapitulative

Î3.1. Câte metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare în Matlab cunoaşteţi şi care sunt acestea?

Î3.2. Care este metoda numerică pe care se bazează metoda de împărţire la stânga / dreapta de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare?

Î3.3. Cum se pot rezolva în Matlab sistemele compatibile nedeterminate de ecuaţii liniare?

Î3.4. Ce returnează funcţia Matlab `pinv`?

Î3.5. Ce este un sistem de ecuaţii liniare supradeterminat?

Î3.6. Ce este un sistem de ecuaţii liniare subdeterminat?

Î3.7. Care este condiţia ca un sistem oarecare de ecuaţii liniare să fie compatibil?

Î3.8. Care este condiţia ca un sistem compatibil (oarecare) de ecuaţii liniare să fie determinat?

Î3.9. Ce puteţi spune legat de sisteme de ecuaţii liniare omogene?

Î3.10. Definiţi noţiunea de pseudo-inversă Moore-Penrose a unei matrice.

Î3.11. Care sunt proprietăţile pseudo-inversei Moore-Penrose a unei matrice?